

**ANALYTISCHE FORTSETZUNG
IN BANACHRÄUMEN**

Martin Schottenloher
München

1972

ANALYTISCHE FORTSETZUNG IN BANACHRÄUMEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität in München

Vorgelegt von
Martin Schottenloher
aus München
am 5. Oktober 1971



Berichterstatter: Professor Dr. Karl Stein
Professor Dr. Walter Roelcke

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Februar 1972

ANALYTISCHE FORTSETZUNG IN BANACHRÄUMEN

von

Martin Schottenloher

Inhalt:

Einleitung	1
§ 1. Analytische Abbildungen	7
§ 2. Maximale simultane analytische Fortsetzung	17
§ 3. Konvexe Gebiete	27
§ 4. Unbeschränkte analytische Funktionen	35
§ 5. Satz von CARTAN-THULLEN und reguläre Klassen	41
§ 6. Topologische Vektorräume analytischer Funktionen	54
§ 7. Holomorphiekonvexität	64
§ 8. Das Spektrum	75
Literatur	84

Einleitung

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen interessiert man sich für die Holomorphiegebiete - das sind Existenzgebiete analytischer Funktionen - und deren Charakterisierung. Seit gut zehn Jahren ist bekannt, daß die folgenden Eigenschaften für ein Gebiet X über dem $\mathbb{C}^n$ äquivalent sind (z.B. [18, S. 283]) :

- 1° X ist ein Holomorphiegebiet.
- 2° X ist holomorph-konvex.
- 3° X stimmt mit seiner Holomorphiehülle überein.
- 4° X stimmt mit dem Spektrum von $\mathcal{O}_X$ überein.
- 5° X ist pseudokonvex.

($\mathcal{O}_X$ ist die Algebra der analytischen Funktionen auf X .)

Für die Funktionentheorie unendlich vieler Variabler, damit ist in dieser Arbeit die Funktionentheorie in Banachräumen gemeint, hat man Anlaß genug, eine entsprechende Charakterisierung anzustreben: Zum Beispiel gilt der Kugelsatz von Hartogs (ALEXANDER [1]) , es gibt also in jedem Banachraum E , $\dim E > 1$, Gebiete $X \subset E$, die nicht Holomorphiegebiete sind; die Theorie der simultanen analytischen Fortsetzung (CARTAN [9, Exp. 7]) überträgt sich ohne Schwierigkeiten auf den unendlichdimensionalen Fall (§ 2) ; verschiedene Definitionen für pseudokonvexe Gebiete sind auch im unendlichdimensionalen Fall äquivalent (BREMERMAN [7] , COEURÉ [11]) . Bis heute ist jedoch nicht bekannt, ob sich Äquivalenzen analog 1° - 5° beweisen lassen; es sei denn unter ganz speziellen Voraussetzungen (DINEEN [15]) . Die größten Schwierigkeiten werden wie im

Klassischen (vgl. OKA [27]) zweifellos auftreten, wenn man aus 5^0 eine der Eigenschaften $1^0 - 4^0$ herleiten will. Die vorliegende Arbeit behandelt vorwiegend die ersten vier Eigenschaften, ohne 5^0 ganz zu übergehen.

In einem unendlichdimensionalen Gebiet hat die Eigenschaft 2^0 nicht unmittelbar derart weitreichende Konsequenzen wie in Gebieten über $\mathbb{C}^n$; denn X ist nicht lokalkompakt: Wir finden in X keine ausschöpfende Folge kompakter Mengen und es läßt sich zeigen, daß $\mathcal{O}_X$, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, nicht tonneliert, also insbesondere kein Frechetraum ist [1]. Um dennoch klassische Beweismethoden übertragen zu können, haben wir Konvexitätseigenschaften von geeigneten Unterräumen $A \subset \mathcal{O}_X$ untersucht. Das hat zu dem für diese Arbeit grundlegenden Begriff der regulären Klasse geführt (Verallgemeinerung von COEURE's Klassen $\mathfrak{U}_T$ auf den nichtseparablen Fall, vgl. [11]) :

Eine reguläre Klasse A im Gebiet X ist eine Teilmenge von $\mathcal{O}_X$, die erstens abgeschlossen bezüglich Potenzierung und Differentiation (vgl. BEHNKE-THULLEN [3, S. 121]) und zweitens lokal beschränkt ist; das soll heißen, daß es zu jedem Punkt des betrachteten Gebietes X eine Umgebung gibt, auf der jede einzelne Funktion aus A beschränkt ist. In Gebieten X über dem $\mathbb{C}^n$ ist diese zweite Eigenschaft für jede Teilmenge von $\mathcal{O}_X$ erfüllt, da X lokalkompakt ist. Im unendlichdimensionalen Fall bedeutet die zweite Eigenschaft für eine große Klasse von Banachräumen eine echte Einschränkung; man weiß nicht, ob das sogar für alle Banachräume richtig ist.

Der Begriff der regulären Klasse erlaubt es nun, den Satz von CARTAN-THULLEN (Fundamentalsatz in [10]) zu formulieren und als einfache Folgerung aus der Integralformel von Cauchy zu beweisen. Aus diesem Satz ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen, wenn wir auf geeigneten regulären Klassen eine Topologie so definieren, daß wir es wie im endlichdimensionalen Fall mit Frécheträumen zu tun haben: Ausgehend von einer abzählbaren "zulässigen" Überdeckung $\mathfrak{B}$ von X (vgl. 5.9.2^o; eine solche Überdeckung erfüllt insbesondere $X = \bigcup \{\overset{\circ}{V} \mid V \in \mathfrak{B}\}$.) setzen wir $A_{\mathfrak{B}} = \{f \mid f \in \mathcal{O}_X, \text{ für alle } V \in \mathfrak{B} \text{ ist } \sup\{|f(x)| \mid x \in V\} < \infty\}$. $A_{\mathfrak{B}}$ ist Unterálgebra von $\mathcal{O}_X$ und reguläre Klasse. Versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus $\mathfrak{B}$ ist $A_{\mathfrak{B}}$ Fréchetálgebra.

Mit diesen regulären Klassen $A_{\mathfrak{B}}$ in unendlichdimensionalen Gebieten X kann man jetzt ähnliche Ergebnisse erzielen wie mit der Fréchetálgebra aller holomorpher Funktionen auf einem Gebiet über $\mathbb{C}^n$; die Rolle der relativ-kompakten Mengen wird dabei von den Mengen aus $\mathfrak{B}$ übernommen: Läßt sich $A_{\mathfrak{B}}$ simultan in ein Gebiet $\underline{X}$ fortsetzen, so ist die Klasse $\underline{A} \subset \mathcal{O}_{\underline{X}}$ der Fortsetzungen von Funktionen $f \in A_{\mathfrak{B}}$ eine reguläre Klasse mit $\underline{A} = A_{\underline{\mathfrak{B}}}$, wobei $\underline{\mathfrak{B}}$ eine abzählbare zulässige Überdeckung von $\underline{X}$ ist, und die Restriktionsabbildung $A_{\mathfrak{B}} \rightarrow A_{\underline{\mathfrak{B}}}$ ist topologisch. Verschiedene Konvexitätseigenschaften sind wie in endlichdimensionalen Gebieten erfüllt. Ist z.B. ein Gebiet $A_{\mathfrak{B}}$ -konvex, so ist X bereits maximale simultane Fortsetzung von $A_{\mathfrak{B}}$, wenn $A_{\mathfrak{B}}$ die Punkte von X trennt. Schließlich kann man die maximale simultane Fortsetzung von $A_{\mathfrak{B}}$ als Teilmenge des Spektrums von $A_{\mathfrak{B}}$ konstruieren.

Durch die Untersuchung der regulären Klassen gewinnt man auch Resultate über die Gesamtheit der holomorphen Abbildungen eines Gebietes X : So läßt sich jede analytische Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ mit Werten in einem Banachraum $\mathbb{F}$ fortsetzen auf die Holomorphiehülle $H(X)$ von X , das heißt, es gibt eine analytische Abbildung $\underline{f}: H(X) \rightarrow \mathbb{F}$, die auf X mit f übereinstimmt. Versieht man $\mathcal{O}_X$ mit der induktiven Topologie aller $A_{\mathfrak{B}}$ - $(\mathcal{O}_X, b) = \lim_{\mathfrak{B}} \text{ind}_{\mathfrak{B}} A_{\mathfrak{B}}$ - , so ist b tonneliert und bornologisch, also im unendlichen Fall echt feiner als die Topologie der kompakten Konvergenz. Läßt sich $\mathcal{O}_X$ simultan in ein Gebiet $\underline{X}$ fortsetzen, so folgt aus den oben erwähnten Eigenschaften für die regulären Klassen, daß die Restriktionsabbildung $(\mathcal{O}_{\underline{X}}, b) \rightarrow (\mathcal{O}_X, b)$ wieder topologisch ist. Dieses Ergebnis löst ein Problem, das von ALEXANDER [1] aufgestellt wurde. Weiter folgt: Ein Holomorphiegebiet ist $A_{\mathfrak{B}}$ -konvex und $A_{\mathfrak{B}}$ -separabel für eine geeignete reguläre Klasse $A_{\mathfrak{B}}$, und die Umkehrung dieser Aussage - also eine Charakterisierung analog zu $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$ - gilt für separable Gebiete. Schließlich läßt sich die Holomorphiehülle des Gebietes X als Teilmenge des Spektrums von $\mathcal{O}_X$ konstruieren, indem man das im letzten Absatz zum Schluß zitierte Ergebnis ausnutzt. Damit sind die Ansätze von ALEXANDER [1] und COEURÉ [11] weitergeführt, die jeweils Fortsetzungen von $\mathcal{O}_X$ als Teilmenge des Spektrums von $\mathcal{O}_X$ konstruieren, ohne zu zeigen, ob diese Fortsetzungen maximal sind.

Wir geben noch einen kurzen Überblick über die einzelnen Paragraphen:

Im ersten Paragraphen werden verschiedene Definitionen des Begriffes "analytische Abbildung" vorgestellt, ohne auf die lange historische Entwicklung dieses Begriffes - wie sie etwa bei TAYLOR [31] dargestellt ist - einzugehen.

Im zweiten Paragraphen wird die Theorie der simultanen analytischen Fortsetzung wie bei CARTAN [9] oder STEIN [30] entwickelt. Als Resultat ist die Existenz der im allgemeinen nichtschlichten Holomorphiehülle eines Gebietes gesichert. Nebenbei wird der Durchschnitt von Gebieten unterhalb eines festen Gebietes genauer beschrieben, was im letzten Paragraphen von Bedeutung ist.

Im dritten Paragraphen wird eine Charakterisierung der konvexen Gebiete angegeben. Zugleich werden Hilfssätze über konvexe Mengen in Banachräumen für den vierten Paragraphen bereitgestellt, in dem die folgende Aussage bewiesen ist: In einem separablen Banachraum E gibt es zu jeder Folge (x_n) aus E ohne Häufungspunkt eine analytische Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sup |f(x_n)| = \infty$. Das hat insbesondere zur Folge, daß man zu jeder offenen Menge $U \subset E$, $U \neq \emptyset$, im Falle $\dim E = \infty$ eine analytische Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ finden kann, die auf U unbeschränkt ist. Dieses Resultat beantwortet eine Frage (teilweise), die von ALEXANDER [1] gestellt wurde.

Im fünften Paragraphen werden zunächst Bezeichnungen aus § 1 auf nichtschlichte Gebiete übertragen. Nach der Definition der regulären Klasse in 5.4 wird dann der Satz von CARTAN-THULLEN bewiesen. Im Anschluß daran werden Beispiele von regulären Klassen gegeben. Schließlich wird in 5.11 definiert, was wir unter einem A -konvexen Gebiet (A reguläre Klasse)

verstehen wollen.

Im sechsten Paragraphen wird die $\mathfrak{A}$ -Topologie auf regulären Klassen $A_{\mathfrak{A}}$ untersucht. Die bereits erwähnten topologischen Eigenschaften bei simultanen analytischen Fortsetzungen von $A_{\mathfrak{A}}$ oder $\mathcal{O}_X$ werden bewiesen.

Im siebten Paragraphen wird der Zusammenhang zwischen Fortsetzungseigenschaften und A -Konvexität untersucht. Wir erhalten unter anderem eine Charakterisierung der separablen Holomorphiegebiete.

Im achten und letzten Paragraphen wird die maximale simultane Fortsetzung einer regulären Klasse $A_{\mathfrak{A}}$ als Teilmenge des Spektrums von $A_{\mathfrak{A}}$ konstruiert, und anschließend mit diesem Ergebnis die Holomorphiehülle von X als Teilmenge des Spektrums von $\mathcal{O}_X$ gefunden.

Die vorliegende Arbeit ist wesentlich beeinflusst durch die Arbeiten von ALEXANDER [1] und COEURÉ [11]. Die Ergebnisse überschneiden sich teilweise mit neueren Resultaten von DINEEN [12 - 15] und HIRSCHOWITZ [20 - 22], wurden aber unabhängig davon meistens mit anderen Methoden gefunden.

Es sei mir gestattet, meinem Lehrer K. Stein für die Ermöglichung und Betreuung dieser Arbeit herzlich zu danken.

§ 1. Analytische Abbildungen

In diesem Paragraphen werden Definitionen und einige grundlegende Eigenschaften der analytischen Abbildungen in komplexen Banachräumen bereitgestellt.

1.1 Bezeichnungen: Mit $E, F, E_1, \dots$ werden in dieser Arbeit Banachräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bezeichnet. $B(a, r) = \{x | x \in E, \|a - x\| < r\}$ ist die offene Kugel um $a \in E$ mit dem Radius $r \in \mathbb{R}_+$. Eine Abbildung $f: E \rightarrow F$ heißt homogenes Polynom vom Grade $n \in \mathbb{N}$, wenn es eine n -lineare Abbildung $\varphi: E^n \rightarrow F$ gibt, so daß $f = \varphi \circ \Delta$ gilt, wobei $\Delta: E \ni a \mapsto (a, a, \dots, a) \in E^n$ ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{P}^n(E, F)$ der Banachraum der stetigen homogenen Polynome vom Grade n mit der Norm $\|f\| = \sup\{\|f(a)\| \mid \|a\| \leq 1\}$ und $\mathcal{L}^n(E, F)$ der Banachraum der stetigen n -linearen Abbildungen $\varphi: E^n \rightarrow F$ mit der Norm $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(a)\| \mid a = (a_1, \dots, a_n), a_i \in E, \|a_i\| \leq 1 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n\}$. Bezeichnet $\mathcal{L}_S^n(E, F)$ den Banachraum der stetigen und symmetrischen n -linearen Abbildungen $\varphi: E^n \rightarrow F$ mit der induzierten Norm, so ist $\mathcal{L}_S^n(E, F)$ direkter Unterraum von $\mathcal{L}^n(E, F)$ (das heißt, es gibt ein algebraisches und topologisches Komplement zu $\mathcal{L}_S^n(E, F)$) und die Banachräume $\mathcal{L}_S^n(E, F)$ und $\mathcal{P}^n(E, F)$ sind isomorph [16, S. 7]. Statt $\mathcal{L}^1(E, \mathbb{C}) = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ wird meist E' geschrieben.

Ist $f: V \rightarrow F$ eine Abbildung von einer Menge V in den Banachraum F , so sei $\|f\|_V = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in V\}$.

1.2 Definition: Sei U offene Menge des Banachraumes E und $f: U \rightarrow F$ eine Abbildung in einen weiteren Banachraum F .

1^0 f heißt in U G-differenzierbar ($\hat{G}$ ATEAUX-differenzierbar), wenn für alle $x \in U$, alle $a \in E$ und alle $v \in F$ die Funktion

$$U(x;a) \ni \lambda \mapsto v \circ f(x + \lambda a) \in \mathbb{C}$$

in $U(x;a) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, x + \lambda a \in U\}$ differenzierbar ist.

2^0 f heißt in U differenzierbar (FRÉCHET-differenzierbar), wenn es zu jedem $x \in U$ eine stetige lineare Abbildung $\varphi \in \mathcal{L}^1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ gibt mit

$$\lim_{\|a\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|a\|} \|f(x + a) - f(x) - \varphi(a)\| = 0.$$

3^0 f heißt in U analytisch, wenn es zu jedem $x \in U$ eine Folge $(p_n \mid n \in \mathbb{N})$ von homogenen Polynomen $p_n \in \mathcal{P}^n(E, F)$ und ein $r \in \mathbb{R}_+$ gibt mit:

i) Die Reihe $\sum_{0 \leq n} \|p_n\| r^n$ konvergiert.

ii) $B(x, r) \subset U$ und es gilt für alle $y \in B(x, r)$:

$$f(y) = \sum_{0 \leq n} p_n(y - x).$$

1.3 Folgerungen: (vgl. ZORN [32] oder HILLE-PHILLIPS [19])

1^0 Sei $f: U \rightarrow F$ eine Abbildung. f ist genau dann in U G-differenzierbar, wenn für alle $x \in U$ und alle $a \in E$ der Grenzwert $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f(x + \lambda a) - f(x))$ existiert. Ist f in U G-differenzierbar und setzen wir

$$Df(x).a = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (f(x + \lambda a) - f(x))$$

für $a \in E$, so ist $Df(x): E \rightarrow F$ linear (aber nicht notwendig stetig) und $P_a^1 f: U \ni x \mapsto Df(x).a \in F$ ist wieder

G-differenzierbar. Sei $P_a^{n+1} f(x) = \frac{1}{n+1} D P_a^n f(x).a$ und $P_a^0 f = f$.

Die Abbildung $P^n f(x): E \ni a \mapsto P_a^n f(x) \in F$ ist dann für jedes $x \in U$ ein homogenes Polynom vom Grade n und f hat für jede abgeschlossene Kugel $\overline{B(x, R)} \subset U$ die Entwicklung $f(y) = \sum_{0 \leq n} P^n f(x) \cdot (y - x)$, $y \in B(x, R)$, wobei die Reihe punktweise (im allgemeinen nicht gleichmäßig) konvergiert.

2° Ist f in U differenzierbar, so ist f auch G-differenzierbar und es gilt mit den Bezeichnungen in 1.2.2° bzw. 1.3.1° : $Df(x) = \varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Insbesondere ist φ eindeutig bestimmt.

3° Ist f in U analytisch, so ist f auch differenzierbar in U . Die Folge (p_n) (1.2.3°) ist für jedes $x \in U$ eindeutig bestimmt, und wir schreiben in Abhängigkeit von f und x : $P^n f(x) = p_n$. Diese Bezeichnung stimmt mit der in 1° gewählten überein. Nach Voraussetzung 1) konvergiert die Reihe $f(y) = \sum_{0 \leq n} P^n f(x) \cdot (y - x)$ gleichmäßig auf $B(x, r)$. Der Konvergenzradius von f in Punkte x werde definiert als $\rho_f(x) = \sup\{r \mid r \in \mathbb{R}_+, \sum_{0 \leq n} \|P^n f(x)\| r^n < \infty\}$, dann ist die Reihe auf jeder Kugel $B(x, r) \subset U$, $0 < r < \rho_f(x)$, gleichmäßig konvergent und beschränkt. Umgekehrt gilt: Ist die in U analytische Abbildung f beschränkt auf $B(x, r) \subset U$, so gilt $\rho_f(x) \geq r$ [16, S. 9]. Für den Konvergenzradius gilt die Formel von CAUCHY-HADAMARD : $\rho_f(x) = (\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|P^n f(x)\|})^{-1}$ [26, S. 11].

Es kann der Fall auftreten, daß die Entwicklung einer analytischen Abbildung $f: U \rightarrow F$ in einer Kugel $B(x, r) \subset U$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert, wie man an dem folgenden Beispiel sieht: Sei $U = l_2$ der Hilbertraum der

quadratsummierbaren Folgen komplexer Zahlen. Für eine Orthonormalbasis $(e_n \mid n \in \mathbb{N})$ von l_2 habe jeder Vektor $x \in l_2$ die Darstellung $x = (\xi_n \mid n \in \mathbb{N})$. Dann ist durch $f: l_2 \ni x \mapsto \sum_{0 \leq n} n(\xi_n)^n \in \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $\rho_f(x) = 1$ für alle $x \in l_2$ gegeben [1, S. 11]. Die Entwicklung im Nullpunkt $f(x) = \sum_{0 \leq n} P^n f(0) \cdot x = \sum_{0 \leq n} n(\xi_n)^n$ konvergiert punktweise in ganz l_2 , gleichmäßig aber nur auf jeder Kugel $B(0, r)$, $0 < r < 1$, da f auf $B(0, 1)$ unbeschränkt ist: $f(e_n) = n \rightarrow \infty$. Diese Situation steht im krassen Gegensatz zur Funktionentheorie im $\mathbb{C}^n$, was unter anderem der Tatsache zuzuschreiben ist, daß ein unendlichdimensionaler Banachraum nicht lokalkompakt ist. Mit unbeschränkten Funktionen beschäftigen wir uns weiter im vierten Paragraphen.

Die drei in 1.2 definierten Begriffe stehen in folgender Beziehung:

1.4 Satz: Sei $U \subset E$, $U \neq \emptyset$, eine offene und zusammenhängende Menge (Gebiet). Für eine Abbildung $f: U \rightarrow F$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1° f ist analytisch.
- 2° f ist differenzierbar.
- 3° Für alle $v \in F'$ ist $v \circ f$ analytisch (bzw. differenzierbar).
- 4° f ist G-differenzierbar und erfüllt eine der sechs unter dieser Voraussetzung gleichwertigen Bedingungen:

- i) f ist auf allen kompakten Mengen aus U beschränkt.
- ii) f ist auf einer offenen nichtleeren Teilmenge von U beschränkt.
- iii) f ist lokalbeschränkt (d.h. zu jedem Punkt $x \in U$ gibt es eine Umgebung auf der f beschränkt ist).
- iv) Für mindestens ein $x \in U$ ist $Df(x)$ stetig.
- v) f ist in mindestens einem Punkte stetig.
- vi) f ist stetig.

Beweise in ZORN [32], [33] ; siehe auch HERVÉ [34].

Als Folgerung ergibt sich mit den Ausführungen von 1.3 :
Ist f G -differenzierbar, aber nicht differenzierbar, so ist f auf jeder Kugel $B(x,r) \subset U$ unbeschränkt. Beispiel: nicht stetige, lineare Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns im folgenden mit analytischen Abbildungen. Satz 1.4 dient dann als Kriterium, zu entscheiden, ob eine vorgegebene Abbildung analytisch ist. Wegen der Eigenschaft 1.4.4^o werden analytische Abbildungen auch holomorphe Abbildungen genannt. Analytische $\mathbb{C}$ -wertige Abbildungen heißen analytische (oder holomorphe) Funktionen.

Es seien noch einige elementare Sätze über analytische Abbildungen zitiert:

1.5 Identitätssatz: Stimmen die im Gebiete $U \subset \mathbb{E}$ analytischen Abbildungen $f, g: U \rightarrow \mathbb{F}$ auf einer nichtleeren

offenen Menge aus U überein, so gilt $f = g$.

1.6 Cauchy-Integral: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{F}$ analytisch, $x \in U$, $a \in \mathbb{E}$ und $R \in \mathbb{R}_+$ mit $x + \lambda a \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq R$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$P^n f(x).a = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \frac{f(x + \lambda a)}{\lambda^{n+1}} d\lambda. \quad [26, S. 21].$$

1.7 Konvergenzsatz: Sei $(f_n \mid n \in \mathbb{N})$, $f_n: U \rightarrow \mathbb{F}$, eine lokal gleichmäßig konvergente Folge analytischer Abbildungen in der offenen Menge $U \subset \mathbb{E}$. Dann ist die Abbildung $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ analytisch in U und es gilt für $x \in U$:

$$\rho_f(x) \geq \inf\{\rho_{f_n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(f_n) ist lokal gleichmäßig konvergent, wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ gibt, auf der $(f_n|_V)$ gleichmäßig konvergiert. $f|_V$ ist dann analytisch und die Aussage über den Konvergenzradius folgt aus 1.3.3°.

1.8 Mannigfaltigkeiten: Komplexe (banachanalytische) Mannigfaltigkeiten lassen sich wie komplexe Mannigfaltigkeiten mit Modellen in Zahlenräumen $\mathbb{C}^n$ einführen (DOUADY [16, S.11]). Sind X, Y komplexe Mannigfaltigkeiten, so sei $\mathcal{O}_X(Y)$ die Garbe der Keime von analytischen Abbildungen auf X mit Werten in Y . Für $U \subset X$ offen sei $\mathcal{O}_X(U, Y) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X(Y))$ die Schnittmenge. Im Falle $Y = \mathbb{C}$ wird auch $\mathcal{O}_X$ statt $\mathcal{O}_X(\mathbb{C})$ geschrieben. Wenn es zu keinen Verwechslungen führen kann,

wird mit $\mathcal{O}_X$ später die Algebra $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\mathbb{C}))$ bezeichnet. Aber in diesem Abschnitt interessieren uns erst einmal die Garben.

Für Banachräume $Y = \mathbb{E}$ werde $\mathcal{O}_X(U, \mathbb{E})$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen; dann ist $\mathcal{O}_X(U, \mathbb{E})$ ein lokalkonvexer Hausdorffscher Vektorraum, dessen zugehörige uniforme Struktur vollständig ist (vergleiche NACHBIN [26, § 6, Prop. 4]). Aus Satz 1.4 erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ unmittelbar einen Isomorphismus $\mathcal{O}_X(U, \mathbb{C}^n) \cong (\mathcal{O}_X(U, \mathbb{C}))^n$ von topologischen Vektorräumen. Um eine entsprechende Aussage für beliebige Banachräume $\mathbb{E}$ zu erhalten, ist es sinnvoll diesen Isomorphismus mit dem von SCHWARTZ in [29] eingeführten ϵ -Produkt zu beschreiben (vgl. auch BUNGART [8]). Dazu einige Vorbereitungen:

1.9 Für vollständige lokalkonvexe Hausdorffräume E, F sei $E'_\mathbb{C}$ der topologische Dual von E , versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz und $\mathfrak{L}_\epsilon(E'_\mathbb{C}, F)$ der Vektorraum $\mathfrak{L}(E'_\mathbb{C}, F)$ der stetigen linearen Abbildungen $E'_\mathbb{C} \rightarrow F$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen gleichgradig stetigen Mengen aus E' . Aus dem Satz von MACKEY ergibt sich die Beziehung $\mathfrak{L}_\epsilon(E'_\mathbb{C}, F) \cong \mathfrak{L}_\epsilon(F'_\mathbb{C}, E)$ (vgl. [29, S. 34]). Der Isomorphismus wird durch $\psi \mapsto {}^t\psi$, $\psi \in \mathfrak{L}_\epsilon(E'_\mathbb{C}, F)$, gegeben, wobei ${}^t\psi$ die Transponierte von ψ ist. Die folgende Definition ist also sinnvoll:

$$E \in F = \mathfrak{L}_\epsilon(E'_\mathbb{C}, F) = \mathfrak{L}_\epsilon(F'_\mathbb{C}, E) \quad .$$

1.10 Satz: Sei X eine Mannigfaltigkeit und E ein Banachraum. Dann gilt für jede offene Menge $U \subset X$:
 $\mathcal{O}_X(U, E) = \mathcal{O}_X(U) \otimes E$. Kurz: $\mathcal{O}_X(E) = \mathcal{O}_X \otimes E$.

Beweis: Für $x \in U$ sei $\delta(x): \mathcal{O}_X(U) \ni f \mapsto f(x) \in E$, dann gilt $\delta(x) \in \mathcal{O}_X(U)'$. Einen Isomorphismus $j: \mathcal{L}_E(\mathcal{O}_X(U)_C', E) \rightarrow \mathcal{O}_X(U, E)$ definieren wir durch $j(\psi) = \psi \circ \delta$ für alle $\psi \in \mathcal{L}_E(\mathcal{O}_X(U)_C', E)$. $j(\psi)$ ist Abbildung von U nach E . $j(\psi)$ ist auch analytisch: Für alle $x \in U$ und alle $\mu \in E'$ gilt: $\mu \circ j(\psi)(x) = \langle \psi \circ \delta(x), \mu \rangle = \langle \delta(x), {}^t\psi(\mu) \rangle$. Also ist nach 1.9 $\mu \circ j(\psi) = {}^t\psi(\mu) \in \mathcal{O}_X(U)$ für alle $\mu \in E'$, und das ist nach Satz 1.4 gleichbedeutend damit, daß $j(\psi)$ analytisch ist. Natürlich ist j linear und injektiv. Die Inverse von j ergibt sich folgendermaßen: Jedes $f \in \mathcal{O}_X(U, E)$ definiert eine Abbildung $f^*: E_C' \ni \mu \mapsto \mu \circ f \in \mathcal{O}_X(U)$. f^* ist linear und auch stetig: Ist $K \subset U$ kompakt, so ist auch $f(K) \subset E$ kompakt. Aus $\|\mu\|_{f(K)} = \|f^*(\mu)\|_K$ folgt die Stetigkeit von f^* und damit $f^* \in \mathcal{L}_E(E_C', \mathcal{O}_X(U))$. Für alle $x \in U$ und alle $\mu \in E'$ gilt $\langle {}^t f^* \circ \delta(x), \mu \rangle = \langle \delta(x), f^*(\mu) \rangle = \mu \circ f(x) = \langle f(x), \mu \rangle$, also ist ${}^t f^* \circ \delta = f$, das heißt $j({}^t f^*) = f$. j ist damit auch surjektiv.

Bleibt zu zeigen, daß j und j^{-1} stetig sind. Eine Menge $H \subset \mathcal{O}_X(U)'$ ist genau dann gleichgradig stetig, wenn es $K \subset U$ kompakt und $C \in \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$(*) \quad |\chi(g)| \leq C \|g\|_K \quad \text{für alle } \chi \in H \text{ und } g \in \mathcal{O}_X(U) .$$

Für kompakte $K \subset U$ ist deshalb $\delta(K) \subset \mathcal{O}_X(U)'$ gleichgradig stetig, und das bedeutet wegen $\|j(\psi)\|_K = \|\psi\|_{\delta(K)}$ für alle $\psi \in \mathcal{L}_E(\mathcal{O}_X(U)_C', E)$, daß j stetig ist. Sei andererseits eine

gleichgradig stetige Menge $H \subset \mathcal{O}_X(U)'$, also $K \subset U$ kompakt und $C \in \mathbb{R}_+$ mit (*) vorgegeben. Für $f \in \mathcal{O}_X(U, \mathbb{E})$ und $\chi \in H$ ist $t_f^*(\chi) \in \mathbb{E}$. Es gibt nach dem Satz von HAHN-BANACH eine stetige Linearform $\mu \in \mathbb{E}'$ mit $\|\mu\| = 1$ und $\|t_f^*(\chi)\| = \langle t_f^*(\chi), \mu \rangle$. Also gilt $\|j^{-1}(f)(\chi)\| = \langle \chi, f^*(\mu) \rangle = |\chi(\mu \circ f)| \leq C \|\mu \circ f\|_K \leq C \|\mu\| \|f\|_K \leq C \|f\|_K$. Es folgt $\|j^{-1}(f)\|_H \leq C \|f\|_K$ und damit die Stetigkeit von j^{-1} .

1.11 Corollar: Für Mannigfaltigkeiten X mit Modellen in Zahlenräumen $\mathbb{C}^n$ gilt $\mathcal{O}_X(\mathbb{E}) = \mathcal{O}_X \hat{\otimes} \mathbb{E}$. (Vervollständigung von $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{E}$ in der ε - oder π -Topologie).

Beweis: GROTHENDIECK [17, S. 78, 79] hat gezeigt, daß der Raum der holomorphen Funktionen auf einem Polyzylinder $P \subset \mathbb{C}^n$ nuklear ist, folglich ist für offene Mengen $U \subset X$ auch $\mathcal{O}_X(U)$ als projektiver Limes nuklearer Räume nuklear [28, S. 103] und es gilt $\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathbb{E} = \mathcal{O}_X(U) \hat{\otimes}_{\varepsilon} \mathbb{E} = \mathcal{O}_X(U) \hat{\otimes}_{\pi} \mathbb{E}$ [28, S. 172].

Diese Formel ist auch für komplexe Räume im folgenden Sinne richtig:

1.12 Corollar: Ist (X, Φ) ein banachanalytischer Raum (DOUADY [16]) mit Modellen in Zahlenräumen $\mathbb{C}^n$, so gilt $\Phi(\mathbb{E}) = \Phi(\mathbb{C}) \hat{\otimes} \mathbb{E}$ für jeden Banachraum $\mathbb{E}$.

Zum Beweis dieses Corollars benötigt man die folgende Aussage über nukleare Räume: Sind E, F, G, H Frécheträume,

und ist H nuklear, so ist mit der Sequenz

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

auch die Sequenz

$$0 \rightarrow E \in F \rightarrow E \in G \rightarrow E \in H \rightarrow 0 \quad \text{exakt} \quad [8] .$$

Mit diesem Corollar ergibt sich, daß die Definitionen der analytischen Abbildung auf einem komplexen Raum mit Werten in einem Banachraum bei DOUADY [16] und BUNGART [8] übereinstimmen.

Aus der Formel 1.12 läßt sich noch ablesen: Ein Morphismus $(f, f_0): (X, G) \longrightarrow (F, \mathcal{O}_F)$ beringter Räume von dem komplexen Raum (X, G) in den Banachraum F läßt sich jedenfalls dann unmittelbar zu einem Morphismus der zugehörigen banachanalytischen Räume $(f, f_1): (X, \Phi) \longrightarrow (F, \Psi)$ (mit $\Phi(E) = G \hat{\otimes} E$, $\Psi(E) = \mathcal{O}_F \otimes E$) fortsetzen, wenn (X, G) ein reduzierter komplexer Raum ist. Im nichtreduzierten Fall ist eine Fortsetzung möglich, wenn der Garbenmorphismus $f_0: \mathcal{O}_F \rightarrow f_{*}G$ (auf den Schnittträumen) stetig ist. Es stellt sich die Frage, ob nicht jeder solche Garbenmorphismus stetig ist.

Schließlich sei noch vermerkt, daß die Formel 1.12 nicht für alle banachanalytischen Räume (X, Φ) gelten kann, ganz abgesehen von der Schwierigkeit auf $\Phi(E)$ eine geeignete Topologie zu definieren: MIGNOT hat in [25] ein Beispiel zweier banachanalytischer Räume $(X, \Phi) \neq (Y, \Psi)$ mit $X = Y$ und $\Phi(C) = \Psi(C)$ angegeben.

§ 2. Maximale simultane analytische Fortsetzung

Die Theorie der analytischen Fortsetzung, wie sie bei CARTAN [9, Exp. 7] dargestellt ist, läßt sich ohne Schwierig- auf den Fall unendlichdimensionaler Banachräume übertragen. Wir wollen in diesem Paragraphen die für das Folgende wesentlichen Sätze mit Beweisen wiederholen.

2.1 Definition: Sei B eine Mannigfaltigkeit (1.8). Die Kategorie $\underline{G}(B)$ der Gebiete über B sei folgendermaßen definiert:

Die Objekte von $\underline{G}(B)$ sind die Paare (X, p) , wobei X ein zusammenhängender Hausdorffraum und $p: X \rightarrow B$ eine lokal-topologische Abbildung ist.

Die Morphismen zwischen Objekten (X, p) , (X', p') aus $\underline{G}(B)$ sind die stetigen Abbildungen $f: X \rightarrow X'$, die $p = p' \circ f$ erfüllen.

$f: (X, p) \rightarrow (X', p')$ soll im folgenden bedeuten: (X, p) , (X', p') sind Gebiete über B , also Objekte aus $\underline{G}(B)$, und f ist Morphismus in der Kategorie $\underline{G}(B)$. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, wird ein Gebiet (X, p) über B auch kurz mit X bezeichnet.

2.2 Folgerungen:

1° Topologische Eigenschaften: Ein Morphismus in $\underline{G}(B)$ ist stets eine lokaltopologische und offene Abbildung. Hat B

abzählbare Topologie, so gilt das auch für X (BOURBAKI, [4, S. 133]). Für den Fall eines Banachraumes $E = B$ als Basisraum bedeutet das: X ist genau dann separabel, wenn E separabel ist. Die "Randdistanz" eines Punktes x aus dem Gebiet (X, p) über dem Banachraum E sei definiert durch $d_X(x) = \sup\{r \mid r \in \mathbb{R}_+, \text{ es gibt eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit: } p|_U: U \rightarrow B(px, r) \text{ ist topologisch}\}$. Zur Abkürzung schreiben wir d statt d_X , wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welches Gebiet es sich handelt. Für $0 < r < d(x)$ sei $B(x, r) \subset X$ die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(B(px, r))$, die x enthält. $B(x, d(x)) = \bigcup \{B(x, r) \mid 0 < r < d(x)\}$. Die Abbildung $d: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ ist stetig, und zwar gilt für $y \in B(x, r)$ stets $|d(x) - d(y)| \leq \|px - py\|$, falls $X \neq E$. Auf X ist durch $p: X \rightarrow E$ in natürlicher Weise eine Metrik $m: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ gegeben: Für $x, y \in X$ sei $m(x, y) = \inf\{\sum_{k=0}^n \|px_k - px_{k+1}\| \mid x = x_0, y = x_{n+1}, \text{ und für } k=0, 1, \dots, n \text{ gilt } x_{k+1} \in B(x_k, d(x_k))\}$.

2° Analytische Eigenschaften: Ist (X, p) ein Gebiet über der Mannigfaltigkeit B , so definieren B und p auf X eine eindeutig bestimmte komplex-analytische Struktur, die X zu einer zusammenhängenden Hausdorffschen Mannigfaltigkeit macht. Jeder Morphismus in $\underline{G}(B)$ ist eine analytische Abbildung. Es gilt aber $\mathcal{O}_X(X, X') \neq \text{Hom}_{\underline{G}(B)}((X, p), (X', p'))$.

Wir beschäftigen uns vorerst noch mit topologischen Eigenschaften von Gebieten. Der "Durchschnitt" von Gebieten (vgl. STEIN [30]) kann eingeführt werden als Produkt in der Kategorie $X/\underline{G}(B)$ der Gebiete "unter" dem Gebiet (X, p) , die

folgendermaßen definiert ist: X sei ein Gebiet (X, p) über B . Die Objekte von $X/\underline{G}(B)$ sind Paare $((X', p'), f')$, wobei (X', p') Gebiet über B und $f': (X, p) \rightarrow (X', p')$ Morphismus von Gebieten über B ist. Die Morphismen von einem Objekt $((X', p'), f')$ in ein Objekt $((X'', p''), f'')$ sind die Morphismen $g: (X', p') \rightarrow (X'', p'')$ mit $f'' = g \circ f'$. Ausführlich geschrieben hat man:

2.3 Definition: Sei (X, p) ein Gebiet über B . Ein Durchschnitt der Gebiete (X_μ, p_μ) , $(\mu \in I)$, bezüglich der Morphismen $f_\mu: (X, p) \rightarrow (X_\mu, p_\mu)$ ist gegeben durch ein Gebiet $(\underline{X}, \underline{p})$ und Morphismen $\underline{f}: (X, p) \rightarrow (\underline{X}, \underline{p})$ und $\underline{f}_\mu: (\underline{X}, \underline{p}) \rightarrow (X_\mu, p_\mu)$, $(\mu \in I)$, mit den folgenden Eigenschaften:

1° Für alle $\mu \in I$ gilt $f_\mu = \underline{f}_\mu \circ \underline{f}$.

2° Ist (X', p') ein Gebiet über B mit Morphismen $f': (X, p) \rightarrow (X', p')$ und $f'_\mu: (X', p') \rightarrow (X_\mu, p_\mu)$ mit $f_\mu = f'_\mu \circ f'$ für alle $\mu \in I$, so gibt es genau einen Morphismus $k: (X', p') \rightarrow (\underline{X}, \underline{p})$ mit $\underline{f} = k \circ f'$ und $f'_\mu = \underline{f}_\mu \circ k$ für alle $\mu \in I$.

Ebenso kann man den projektiven Limes eines projektiven Systems von Gebieten unter einem Gebiet (X, p) betrachten. Für den letzten Paragraphen wollen wir den Durchschnitt einer Familie von Gebieten genauer beschreiben, indem wir Existenz und Eindeutigkeit nachweisen:

2.4 Satz: Seien (X, p) , (X_μ, p_μ) , $(\mu \in I)$, Gebiete über dem Banachraum E und $f_\mu: (X, p) \rightarrow (X_\mu, p_\mu)$ Morphismen in $\underline{G}(E)$. Dann existiert der Durchschnitt der Gebiete (X_μ, p_μ) bezüglich der Morphismen f_μ , und dieser ist bis auf Isomorphie in $\underline{G}(E)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei d_μ die Randdistanz in (X_μ, p_μ) . Auf der Menge $X_0 = \{(x_\mu) \mid (x_\mu) \in \prod_{\mu \in I} X_\mu, p_\mu(x_\mu) = p_\nu(x_\nu) \text{ für alle } \mu, \nu \in I, \inf_{\mu \in I} d_\mu(x_\mu) > 0\}$ wird durch Angabe von Umgebungsbasen eine Topologie definiert: Für $x = (x_\mu) \in X_0$ und $0 < r < \inf_{\mu \in I} d_\mu(x_\mu) = \underline{d}(x)$ sei $B(x, r) = X_0 \cap \prod_{\mu \in I} B(x_\mu, r)$. Dann ist die durch die Umgebungsbasen $(B(x, r) \mid 0 < r < \underline{d}(x))$ definierte Topologie feiner als die Produkttopologie, also Hausdorffsch. Die Abbildung $f: X \ni x \mapsto (f_\mu(x)) \in X_0$ ist stetig nach Konstruktion von X_0 . Sei $\underline{X}$ die Zusammenhangskomponente von X_0 , die $f(X)$ enthält, und $\underline{f}: X \rightarrow \underline{X}$ die Restriktion von f . Die Abbildung $\underline{p}: \underline{X} \ni (x_\mu) \mapsto p_\nu(x_\nu) \in E$ ist wohldefiniert nach Definition von $\underline{X}$, und macht $(\underline{X}, \underline{p})$ zu einem Gebiet über E mit $\underline{p} = \underline{p} \circ \underline{f}$. Die stetigen Abbildungen $\underline{f}_\mu: \underline{X} \ni (x_\nu) \mapsto x_\mu \in X_\mu$ ($\mu \in I$) erfüllen $\underline{p} = p_\nu \circ \underline{f}_\nu$ und $\underline{f}_\nu = \underline{f}_\nu \circ \underline{f}$ für alle $\nu \in I$, also ist 1^0 gezeigt.

Es bleibt die Maximalität, also 2^0 zu zeigen. Seien Morphismen $f': (X, p) \rightarrow (X', p')$, $f'_\mu: (X', p') \rightarrow (X_\mu, p_\mu)$ mit $f_\mu = f'_\mu \circ f'$ für alle $\mu \in I$ gegeben. Für $x' \in X'$ gilt $p_\mu \circ f'_\mu(x') = p'(x') = p_\nu \circ f'_\nu(x')$ für alle $\mu, \nu \in I$ und $\inf_{\mu} d_\mu(f'_\mu(x')) \geq d_{X'}(x') > 0$. Also ist $(f'_\mu(x')) \in X_0$ und $k: X' \ni x' \mapsto (f'_\mu(x')) \in X_0$ definiert eine stetige Abbildung. $k(X')$ ist zusammenhängend und es gilt für $x \in X$:

$k \circ f'(x) = (f'_\mu \circ f'(x)) = (f'_\mu(x)) = \underline{f}(x)$; daher ist $k(X') \subset \underline{X}$,
und k läßt sich als Morphismus $(X', p') \rightarrow (\underline{X}, p)$ auffassen.
Schließlich gilt $f'_\mu = \underline{f}_\mu \circ k$ für alle $\mu \in I$ und damit 2° ,
denn die Einzigkeit von k folgt aus dem Identitätssatz.

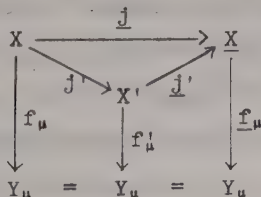
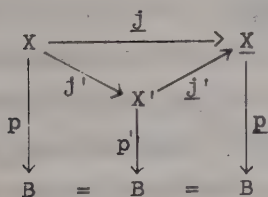
Die Eindeutigkeit des Durchschnitts folgt ebenso - unab-
hängig von der Existenz - aus dem Identitätssatz.

Wir kommen jetzt zu den simultanen analytischen Fort-
setzungen:

2.5 Definition: Sei (X, p) Gebiet über B und

$A = (f_\mu \mid \mu \in I)$ eine Familie von analytischen Abbildungen
 $f_\mu \in \mathcal{O}_X(X, Y_\mu)$ in Mannigfaltigkeiten Y_μ . Eine simultane ana-
lytische Fortsetzung von A (über B relativ zu p) ist ein
Tripel (X', j', A') , wobei (X', p') ein Gebiet über B ,
 $j': (X, p) \rightarrow (X', p')$ ein Morphismus und $A' = (f'_\mu \mid \mu \in I)$
eine Familie von analytischen Abbildungen $f'_\mu \in \mathcal{O}_{X'}(X', Y_\mu)$
mit $f_\mu = f'_\mu \circ j'$ für alle $\mu \in I$ ist.

Eine (simultane analytische) Fortsetzung $(\underline{X}, \underline{j}, \underline{A})$ von
 A heißt maximal, wenn es zu jeder Fortsetzung (X', j', A')
von A einen Morphismus $\underline{j}': (X', p') \rightarrow (\underline{X}, p)$ so gibt, daß
 $(\underline{X}, \underline{j}', \underline{A})$ Fortsetzung von A' mit $\underline{j} = \underline{j}' \circ j'$ ist. Es erge-
ben sich die folgenden kommutativen Diagramme:



Unabhängig von der Existenz ergibt sich aus dem Identitätssatz: Eine maximale Fortsetzung (über B relativ zu p) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir können also von "der" maximalen simultanen analytischen Fortsetzung (über B relativ zu p) sprechen.

Man erkennt unmittelbar, daß der Durchschnitt von Gebieten (X_μ, p_μ) bezüglich einer Familie $A = (f_\mu \mid \mu \in I)$ von Morphismen $f_\mu: (X, p) \rightarrow (X_\mu, p_\mu)$ per definitionem genau die maximale Fortsetzung von A ist. Zur Konstruktion der maximalen Fortsetzung muß man aber im allgemeinen analytische Eigenschaften heranziehen:

2.6 Satz: Sei (X, p) Gebiet über der Mannigfaltigkeit B . Dann existiert zu jeder Familie $A = (f_\mu \mid \mu \in I)$, $f_\mu \in \mathcal{O}_X(X, Y_\mu)$ die maximale simultane analytische Fortsetzung von A (über B relativ zu p).

Beweis: Für $b \in B$ sei $\mathcal{O}_{B,b}(Y_\mu)$ der Halm der Garbe $\mathcal{O}_B(Y_\mu)$ (vgl. 1.8) im Punkte b . Sei $B_I = \{(b, (h_\mu)) \mid b \in B, (h_\mu) \in \prod_{\mu \in I} \mathcal{O}_{B,b}(Y_\mu)\}$, es gibt eine offene Umgebung $V \subset B$ von b und $g_\mu \in \mathcal{O}_B(V, Y_\mu)$ mit $h_\mu = (g_\mu)_b$ für alle $\mu \in I$. Auf B_I wird eine Topologie durch Angabe einer Basis definiert: Für offene Mengen $V \subset B$ und Abbildungen $g_\mu \in \mathcal{O}_B(V, Y_\mu)$ sei $N(V, (g_\mu)) = \{(b, ((g_\mu)_b)) \mid b \in V\}$. Dann ist das Mengensystem $\mathcal{B} = \{N(V, (g_\mu)) \mid V \subset B \text{ offen}, (g_\mu) \in \prod_{\mu \in I} \mathcal{O}_B(V, Y_\mu)\}$ Basis einer Hausdorffschen Topologie auf B_I . Eine Abbildung $j: X \rightarrow B_I$ erhalten wir folgendermaßen: Zu $x \in X$ gibt es

eine offene Umgebung $U \subset X$ von x , so daß $p|_U: U \rightarrow p(U)$ topologisch ist. Ist U' eine weitere solche Umgebung, so gilt $(f_\mu \circ (p|_U)^{-1})_{p_x} = (f_\mu \circ (p|_{U'})^{-1})_{p_x}$ für alle $\mu \in I$, also ist die Abbildung $j: X \ni x \mapsto (p_x, ((f_\mu \circ p^{-1})_{p_x})) \in B_I$ wohldefiniert. Nach Konstruktion von B_I ist j stetig. Sei nun $\underline{X}$ die Zusammenhangskomponente von B_I , die $j(X)$ enthält und $\underline{j}: X \rightarrow \underline{X}$ die Restriktion von j . $\underline{X}$ wird zum Gebiet über B durch die lokaltopologische Abbildung $\underline{p}: \underline{X} \rightarrow B$, definiert durch $\underline{p}: \underline{X} \ni (b, (h_\mu)) \mapsto b \in B$. Die analytischen Abbildungen $\underline{f}_v: \underline{X} \ni (b, (h_\mu)) \mapsto h_v(b) \in Y_v$ erfüllen $f_v = \underline{f}_v \circ \underline{j}$ für alle $v \in I$, ferner gilt $p = \underline{p} \circ \underline{j}$, also ist mit $\underline{A} = (\underline{f}_\mu \mid \mu \in I)$ durch $(\underline{X}, \underline{j}, \underline{A})$ eine Fortsetzung von A gegeben.

$(\underline{X}, \underline{j}, \underline{A})$ ist maximal: Zu einer weiteren Fortsetzung (X', j', A') von A findet man analog eine Fortsetzung $(\underline{X}', \underline{j}', \underline{A}')$ von A' mit $\underline{X}' \subset B_I$ und $\underline{j} = \underline{j}' \circ j'$. Daraus folgt $\underline{X}' = \underline{X}$ und $\underline{A} = \underline{A}'$, das heißt $(\underline{X}, \underline{j}, \underline{A})$ ist maximal. Im übrigen ist $\underline{j}'$ wieder eindeutig bestimmt.

2.7 Corollar: Sei (X, p) Gebiet über dem Banachraum E . Die maximale simultane analytische Fortsetzung einer Familie A von analytischen Abbildungen läßt sich im folgenden Sinne schrittweise erhalten: Ist $(A_\mu \mid \mu \in I)$ ein System von Familien $A_\mu \subset A$ mit $\bigcup_{\mu \in I} A_\mu = A$, so betrachte man zunächst die maximale Fortsetzung $(X_\mu, j_\mu, \underline{A}_\mu)$ von A_μ für jedes $\mu \in I$ und bilde dann den Durchschnitt $\underline{j}: (X, p) \rightarrow (\underline{X}, \underline{p})$ der Gebiete (X_μ, p_μ) bezüglich der Morphismen $(j_\mu \mid \mu \in I)$. Man erhält Morphismen $\underline{j}_\mu: (\underline{X}, \underline{p}) \rightarrow (X_\mu, p_\mu)$ mit $j_\mu = \underline{j}_\mu \circ \underline{j}$.

Setzt man $\underline{A} = (\underline{f} \circ \underline{j}_\mu \mid \mu \in I, \underline{f} \in \underline{A}_\mu)$, so ist $(\underline{X}, \underline{j}, \underline{A})$ maximale Fortsetzung von A .

Die folgende Trennbarkeitseigenschaft wird von der maximalen simultanen analytischen Fortsetzung erfüllt:

2.8 Corollar: Sei $A = (f_\mu \mid \mu \in I)$ eine Familie analytischer Abbildungen $f_\mu \in \mathcal{O}_X(X, Y_\mu)$ und $T = (g_\nu \mid \nu \in J)$, $J \subset I$, eine Familie analytischer Abbildungen $g_\nu \in \mathcal{O}_B(B, Y_\nu)$ mit $f_\nu = g_\nu \circ p$ für alle $\nu \in J$ und $(g_\nu(b)) \neq (g_\nu(b'))$ für alle $b, b' \in B$, $b \neq b'$. Dann ist die maximale Fortsetzung $(\underline{X}, \underline{j}, \underline{A})$ von A $\underline{A}$ -separabel, das heißt, für alle $x, y \in \underline{X}$, $x \neq y$, gibt es $\underline{f} \in \underline{A}$ mit $\underline{f}(x) \neq \underline{f}(y)$.

Für den uns interessierenden Fall ist die maximale Fortsetzung unabhängig von der speziellen Realisierung $p: X \rightarrow E$ des Gebietes (X, p) , und es gelten gewisse funktorielle Eigenschaften:

2.9 Satz: Seien $(X, p), (X', p')$ Gebiete über dem Banachraum E mit den maximalen simultanen analytischen Fortsetzungen $(\underline{X}, \underline{j}, \underline{\mathcal{O}}_{\underline{X}})$ von $\mathcal{O}_X (= \mathcal{O}_X(X, \mathbb{C}))$ bzw. $(\underline{X}', \underline{j}', \underline{\mathcal{O}}_{\underline{X}'})$ von $\mathcal{O}_{X'} (= \mathcal{O}_{X'}(X', \mathbb{C}))$. Dann gibt es zu jeder lokal bianalytischen Abbildung $f: X \rightarrow X'$ eine (eindeutig bestimmte) lokal bianalytische Abbildung $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ mit:

1° Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & X' \\
 \downarrow j & & \downarrow j' \\
 \underline{X} & \xrightarrow{\underline{f}} & \underline{X'}
 \end{array}$$

ist kommutativ .

2° Für eine weitere lokal bianalytische Abbildung

$g: X' \rightarrow X''$ gilt $\underline{g \circ f} = \underline{g} \circ \underline{f}$.

3° Ist f Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten, also analytisch mit analytischer Inversen, so gilt das auch für $\underline{f}$.

Wir müssen an dieser Stelle vorgreifen auf den sechsten Paragraphen, und setzen voraus, daß die folgende Aussage bewiesen ist: Jede analytische Abbildung $g: X \rightarrow E$ in einen Banachraum hat eine Fortsetzung $\underline{g}: \underline{X} \rightarrow E$ (d.h. es gibt $\underline{g} \in \mathcal{O}_{\underline{X}}(\underline{X}, E)$ mit $\underline{g} = \underline{g} \circ j$; vgl. 6.1, 6.9). Wir zeigen erst:

2.10 Hilfssatz: Ist $g: X \rightarrow E$ analytisch und lokal bianalytisch, so ist die Fortsetzung $\underline{g}: \underline{X} \rightarrow E$ ebenfalls lokal bianalytisch.

Beweis: Sei $Dg: X \ni x \mapsto Dg \circ p^{-1}(px) \in \mathcal{L}(E, E)$. Nach Voraussetzung ist $Dg(x)$ für jeden Punkt $x \in X$ Isomorphismus von Banachräumen. Daher ist $\bar{D}g: X \ni x \mapsto (Dg(x))^{-1} \in \mathcal{L}(E, E)$ wohldefiniert und analytisch. Für alle $x \in X$ ist dann $Dg(x) \circ \bar{D}g(x) = \bar{D}g(x) \circ Dg(x) = \text{id}_E$. Aufgrund des Identitätssatzes folgt für die Fortsetzungen $\underline{Dg} = \underline{Dg}$ und für alle $y \in \underline{X}$: $\underline{Dg}(y) \circ \bar{\underline{D}g}(y) = \bar{\underline{D}g}(y) \circ \underline{Dg}(y) = \text{id}_{\underline{E}} = \text{id}_E$. Also ist $\underline{Dg}(y)$ Isomorphismus und daher $\underline{g}$ lokal bianalytisch.

Beweis von 2.9.1° : Man prüft leicht nach, daß $(\underline{X'}, j' \circ f, \mathcal{O}_{\underline{X'}})$ maximale Fortsetzung von $f^*_{\mathcal{O}_X} = \{g \circ f \mid g \in \mathcal{O}_{\underline{X}}\}$ ist. Jede dieser Funktionen aus $\mathcal{O}_X$ besitzt eine Fortsetzung $\underline{g} \circ f$ nach $\underline{X}$ mit $g \circ f = \underline{g} \circ f \circ j$. Sei $\underline{f^*}_{\mathcal{O}_X} = \{\underline{g} \circ f \mid g \in \mathcal{O}_{\underline{X}}\}$. Wendet man jetzt den Hilfssatz auf $p' \circ f: X \rightarrow \mathbb{E}$ an, so ergibt sich, daß $(\underline{X}, \underline{p'} \circ f)$ ein Gebiet und $(\underline{X}, j, \underline{f^*}_{\mathcal{O}_X})$ Fortsetzung von $f^*_{\mathcal{O}_X}$ ist. Also gibt es einen Morphismus $\underline{f}: (\underline{X}, \underline{p'} \circ f) \rightarrow (\underline{X'}, \underline{p'})$, so daß $(\underline{X'}, \underline{f}, \mathcal{O}_{\underline{X'}})$ Fortsetzung von $\underline{f^*}_{\mathcal{O}_X}$ ist. Deshalb gilt insbesondere $j' \circ f = \underline{f} \circ j$.

2° Gilt unmittelbar aufgrund des Identitätssatzes:

$$\underline{g} \circ f \circ j = \underline{g} \circ j' \circ f = j'' \circ g \circ f = \underline{g} \circ f \circ j \text{ nach } 1^\circ, \text{ also}$$

$$\underline{g} \circ \underline{f}|_j(X) = \underline{g} \circ \underline{f}|_j(X) \quad .$$

3° Folgt aus 2° mit $g = f^{-1}$.

Nach dem bereits zitierten Ergebnis aus § 6 ist für ein Gebiet (X, p) über $\mathbb{E}$ die maximale Fortsetzung (relativ zu p) aller holomorphen Funktionen gleich der maximalen Fortsetzung aller analytischen Abbildungen in einen beliebigen Banachraum. Aus 2.9.3° folgt, daß die maximale Fortsetzung unabhängig von p ist. Wir nennen diese Fortsetzung die Holomorphiehülle von X , und bezeichnen sie mit $H(X)$. In 2.9 wurde bewiesen:

2.11 Corollar: Durch die folgende Vorschrift wird ein Funktor $H: \underline{\underline{G(\mathbb{E})}} \rightarrow \underline{\underline{G(\mathbb{E})}}$ definiert:

Für Objekte (X, p) aus $\underline{\underline{G(\mathbb{E})}}$ sei $H(X, p) = (\underline{X}, \underline{p})$ die Holomorphiehülle wie in 2.6 konstruiert.

Für Morphismen $f: (X, p) \rightarrow (X', p')$ sei $H(f) = \underline{f}$ wie in 2.9.

§ 3. Konvexe Gebiete

Für den nächsten Paragraphen werden zwei Hilfssätze über konvexe Mengen in Banachräumen benötigt. Abgesehen von dieser Anwendung können die beiden Hilfssätze zu einer Charakterisierung der konvexen Gebiete dienen, die formale Analogien zur Charakterisierung der pseudokonvexen Gebiete (COEURE [11, th. 10.1], vgl. 3.8) und zur Charakterisierung der holomorph-konvexen Gebiete über $\mathbb{C}^n$ aufweist. Das soll in diesem Paragraphen durchgeführt werden.

Bekanntlich heißt eine Menge $V \subset E$ konvex, wenn für alle Punkte $x, y \in V$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt: $tx + (1-t)y \in V$. Die konvexe Hülle $\text{Co}W$ einer beliebigen Menge $W \subset E$ ist der Durchschnitt aller konvexen Mengen $V \subset E$, die W enthalten. Es gilt [28, S. 39]:

$$\text{Co}W = \left\{ \sum_{\kappa=1}^n t_{\kappa} x_{\kappa} \mid x_{\kappa} \in W, \sum_{\kappa=1}^n t_{\kappa} = 1, t_{\kappa} \geq 0 \text{ für } \kappa = 1, \dots, n \right\}.$$
Daraus folgt:

3.1 Hilfssatz: Seien $a_1, a_2, \dots, a_m \in E$ und $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}_+$, und sei $T = \{(t_1, t_2, \dots, t_m) \mid t_{\mu} \geq 0 \text{ für } \mu = 1, 2, \dots, m, \sum_{\mu=1}^m t_{\mu} = 1\}$. Ist dann $W = \bigcup_{\mu=1}^m B(a_{\mu}, r_{\mu})$, so gilt $\text{Co}W = \bigcup \{B(t) \mid t \in T\}$ mit $B(t) = B(\sum_{\mu=1}^m t_{\mu} a_{\mu}, \sum_{\mu=1}^m t_{\mu} r_{\mu})$.

Beweis: Jedes $x \in \bigcup \{B(t) \mid t \in T\}$ erfüllt $\|x - \sum_{\mu=1}^m t_{\mu} a_{\mu}\| < \sum_{\mu=1}^m t_{\mu} r_{\mu}$ für ein $t = (t_1, \dots, t_m) \in T$. x_v sei für $v = 1, 2, \dots, m$ definiert durch

$x_v = a_v + r_v (\sum t_\mu r_\mu)^{-1} (x - \sum t_\mu a_\mu)$. Dann gilt $\|x_v - a_v\| < r_v$,
das heißt $x_v \in B(a_v, r_v)$, also $x = \sum t_v x_v \in \text{CoW}$.

Bleibt zu zeigen, daß $\cup\{B(t) \mid t \in T\}$ konvex ist. Für
 $x, y \in \cup\{B(t) \mid t \in T\}$ gilt $\|x - \sum t_\mu a_\mu\| < \sum t_\mu r_\mu$ und
 $\|y - \sum s_\mu a_\mu\| < \sum s_\mu r_\mu$ mit geeigneten $(t_1, \dots, t_m), (s_1, \dots, s_m) \in T$.
Ist $t \in [0, 1]$, so folgt
 $\|tx + (1-t)y - \sum (tt_\mu + (1-t)s_\mu)a_\mu\| < \sum (tt_\mu + (1-t)s_\mu)r_\mu$ und
damit $tx + (1-t)y \in \cup\{B(t) \mid t \in T\}$.

3.2 Definition: Eine Funktion $u: X \rightarrow [-\infty, \infty[$, definiert
in einer offenen Menge $X \subset \mathbb{E}$, heißt konvex, wenn gilt:

1° u ist nach oben halbstetig.

2° Für alle $x, y \in X$ und $t \in [0, 1]$ mit $tx + (1-t)y \in X$
gilt $u(tx + (1-t)y) \leq tu(x) + (1-t)u(x)$.

Mit K_X werde die Menge der konvexen Funktionen auf X
bezeichnet. Es ist klar, daß die Restriktionen von reell-line-
aren stetigen Funktionen $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Konstanten zu K_X
gehören. Ist $f \in \mathbb{E}'$, so ist $|f|: X \ni x \mapsto |f(x)| \in \mathbb{R}$ kon-
vex.

Für den nächsten Hilfssatz benötigen wir noch einige Be-
zeichnungen. Für eine Klasse H von reell-wertigen (einschließ-
lich $-\infty, \infty$) Funktionen auf dem Gebiet (X, p) über $\mathbb{E}$ und
eine Menge $V \subset X$ sei
 $\hat{H}(V, X) = \{x \mid x \in X, \text{ für alle } h \in H \text{ gilt } h(x) \leq \sup_{v \in V} h(v)\}$.
Analog sei für eine Klasse A von komplexwertigen Funktionen
auf X und eine Menge $V \subset X$:

$\hat{A}(V, X) = \{x \mid x \in X, \text{ für alle } f \in A \text{ gilt } |f(x)| \leq \|f\|_V\}$.

Sei $L = E' \oplus \mathbb{C} \subset \mathcal{O}_E$.

3.3 Hilfssatz: Für eine Menge $V \subset E$ gilt:

1° $\text{Co}V \subset \hat{K}_E(V, E) \subset \overline{\text{Co}V}$.

2° $\overline{\text{Co}V} \subset \hat{L}(V, E)$ und $\overline{\text{Co}V} = \hat{L}(V, E)$, falls V beschränkt.

Beweis: 1° $\hat{K}_E(V, E)$ ist konvex: Für $u \in K_E$ ist nämlich $\hat{u}(V, E)$ konvex nach Definition der konvexen Funktionen, also gilt das auch für den Durchschnitt $\hat{K}_E(V, E) = \bigcap_{u \in K_E} \hat{u}(V, E)$. Wegen $V \subset \hat{K}_E(V, E)$ folgt $\text{Co}V \subset \hat{K}_E(V, E)$. Wir zeigen noch: $\hat{K}_E(V, E) \subset \overline{\text{Co}V}$. Sei $x \notin \overline{\text{Co}V}$; nach dem Trennungssatz [28, S. 65] gibt es eine reell-lineare und stetige Funktion $u: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) > \sup\{u(y) \mid y \in \overline{\text{Co}V}\}$, also gilt $x \notin \hat{K}_E(V, E)$.

2° Wie oben ist $\hat{f}(V, E)$ abgeschlossen und konvex für jede Funktion $f \in L$ und damit $\hat{L}(V, E)$ abgeschlossen und konvex. Also gilt $\overline{\text{Co}V} \subset \hat{L}(V, E)$. Ist V beschränkt, so auch $\overline{\text{Co}V}$ und man findet zu $x \notin \overline{\text{Co}V}$ nach dem Trennungssatz eine reell-lineare stetige Funktion u auf E mit $u(x) > \sup\{u(y) \mid y \in \overline{\text{Co}V}\} = r$. Setzt man $f: E \ni a \mapsto u(a) - iu(ia) \in \mathbb{C}$ ($i = \sqrt{-1}$), so ist $f \in E'$ und $f(\overline{\text{Co}V}) \subset \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \text{Re} \lambda \leq r\} \not\ni f(x)$. Es gibt wegen der Beschränktheit von $\overline{\text{Co}V}$ Zahlen $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $R \in \mathbb{R}_+$, so daß $f(\overline{\text{Co}V}) \subset B(\lambda_0, R)$ und $f(x) \notin \overline{B(\lambda_0, R)}$ gilt. Mit $g = f - \lambda_0$ folgt dann $|g(x)| > R \geq \|g\|_{\overline{\text{Co}V}} \geq \|g\|_V$, also $x \notin \hat{L}(V, E)$.

Ein Gebiet $X \subset \mathbb{C}^n$ ist bekanntlich genau dann konvex, wenn es linear-konvex ist, das heißt, wenn für jede kompakte Menge $K \subset X$ auch $\hat{L}(K, X) \subset X$ kompakt ist [3]. Aus den Hilfssätzen folgen entsprechende Charakterisierungen von konvexen Gebieten in beliebigen Banachräumen, je nachdem welche Mengen man in diesem Zusammenhang als die Analoga der kompakten Mengen auffaßt. Dazu noch die folgenden

3.4 Bezeichnungen: (X, p) sei Gebiet über $\mathbb{E}$, $\mathcal{O}_X$ sei wieder die Algebra $\mathcal{O}_X(X, \mathbb{C})$.

$1^\circ \mathfrak{B}_\infty(X) = \mathfrak{B}_\infty = \{V \mid V \subset X, dV = \inf\{d(v) \mid v \in V\} > 0, V \text{ beschränkt}\}$. Dabei heißt $V \subset X$ beschränkt, wenn es $x_0 \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$ mit $V \subset \{x \mid x \in X, m(x, x_0) \leq r\}$ gibt. (m ist Metrik auf X , vgl. 2.2.1^o).

$A_\infty(X) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_X, f \text{ ist auf allen } V \in \mathfrak{B}_\infty \text{ beschränkt}\}$.

$2^\circ \mathfrak{B}_d(X) = \mathfrak{B}_d = \{V \mid V \subset X, \text{ es gibt } x_1, x_2, \dots, x_m \in X \text{ und } r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } r_\mu < d(x_\mu) \text{ für } \mu = 1, 2, \dots, m, \text{ so daß gilt } V \subset \bigcup_{\mu=1}^m B(x_\mu, r_\mu)\}$. ($d = d_X$ Randdistanz in X)

$A_d(X) = A_d = \{f \mid f \in \mathcal{O}_X, f \text{ ist auf allen } V \in \mathfrak{B}_d \text{ beschränkt}\}$.

$3^\circ \mathfrak{B}_0(X) = \mathfrak{B}_0 = \{V \mid V \subset X \text{ relativ kompakt}\}; A_0(X) = \mathcal{O}_X$.

Für $\mathbb{E} = \mathbb{C}^n$ gilt $A_\infty = A_d = \mathcal{O}_X$. Im Falle $\dim \mathbb{E} = \infty$ gilt allgemein $A_\infty \subset A_d \subset \mathcal{O}_X$, und die Inklusionen können echt sein.

Nun zu einer ersten Charakterisierung der konvexen Gebiete:

3.5 Satz: Für ein Gebiet $X \subset \mathbb{E}$ sind die folgenden

Aussagen äquivalent:

1° X ist konvex.

2° Für alle $V \in \mathfrak{B}_\infty$ gilt $d(\hat{L}(V, X)) = dV$.

3° Für alle $V \in \mathfrak{B}_\infty$ gilt $\hat{L}(V, X) \in \mathfrak{B}_\infty$.

4° Für alle $V \in \mathfrak{B}_d$ gilt $\hat{L}(V, X) \in \mathfrak{B}_d$.

5° Für alle $V \in \mathfrak{B}_0$ gilt $\hat{L}(V, X) \in \mathfrak{B}_0$.

Beweis: 1° $\Rightarrow$ 2°: Sei $V \in \mathfrak{B}_\infty$. Da X konvex ist, gilt

$\text{Co}V \subset X$. Wir zeigen $d(\text{Co}V) = dV$, dann folgt wegen

$\hat{L}(V, X) \subset \hat{L}(V, \mathbb{E}) = \overline{\text{Co}V}$ (3.3.2°) und der Stetigkeit von d :

$d(\hat{L}(V, X)) \geq d(\overline{\text{Co}V}) = dV$. Zu $x \in \text{Co}V$ gibt es $t = (t_1, \dots, t_m)$,

$t \in T$ und $x_1, \dots, x_m \in V$ mit $x = \sum_{\mu=1}^m t_\mu x_\mu$. Mit

$B(x_\mu, d(x_\mu)) \subset X$ gilt auch $\text{Co}(\bigcup_{\mu=1}^m B(x_\mu, d(x_\mu))) \subset X$, also

$B(t) \subset X$ nach Hilfssatz 3.1. Das bedeutet

(*) $d(\sum_{\mu=1}^m t_\mu x_\mu) \geq \sum_{\mu=1}^m t_\mu d(x_\mu)$

Folglich ist $d(x) = d(\sum_{\mu=1}^m t_\mu x_\mu) \geq \sum_{\mu=1}^m t_\mu d(x_\mu) \geq dV$.

2° $\Rightarrow$ 3° gilt unmittelbar.

1° $\Rightarrow$ 4°: Sei $V \in \mathfrak{B}_d$, also $V \subset \bigcup_{\mu=1}^m B(x_\mu, r_\mu)$ mit

$0 < r_\mu < d(x_\mu)$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $r_\mu + \varepsilon < d(x_\mu)$

für $\mu = 1, 2, \dots, m$. Da X konvex ist, gilt (3.1):

$\text{Co}V \subset \bigcup_{t \in T} B(t) \subset \bigcup_{t \in T} B(\sum_{\mu=1}^m t_\mu x_\mu, \sum_{\mu=1}^m t_\mu r_\mu + \varepsilon) \subset X$, und endlich

viele Kugeln der zweiten Vereinigung überdecken bereits $\overline{\text{Co}V}$.

1° $\Rightarrow$ 5° Wie oben gilt für $V \in \mathfrak{B}_0$ $d(\overline{\text{Co}V}) = dV$. V ist relativ kompakt, also $\overline{\text{Co}V}$ kompakt und damit gehört

$\hat{L}(V, X) = \hat{L}(V, \mathbb{E}) = \overline{\text{Co}V}$ zu $\mathfrak{B}_0$.

Aus jeder der Eigenschaften 2° - 5° folgt: X ist konvex.

Sei $x, y \in X$ mit $\min\{d(x, y), 1\} > 0$. Wegen
 $d(x, y) = \inf\{d(x, z) + d(z, y) \mid z \in X\}$ mit $d(x, y) = 1$ folgt
 $\inf\{d(x, z) + d(z, y) \mid z \in X\} = 1$. Das heißt, X ist konvex.

3.5.2. Charakterisierung der pseudokonvexen Räume

3.5.2.1. Satz: Sei ein Raum X ein $\mathcal{K}_X$ sind die folgenden
 Aussagen äquivalent:

1. X ist konvex.
2. $-\log d$ ist eine konvexe Funktion.
3. Zu jeder Folge (x_n) aus X mit $d(x_n) \rightarrow 0$ gibt
 es eine Funktion $u \in \mathcal{K}_X$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} u(x_n) = \infty$.
4. Für alle $V \in \mathcal{U}_X$ gilt $d(\mathcal{K}_X(V, X)) > 0$.
5. Es gilt eine der Eigenschaften 3.5.2.0 - 5.0 mit $\mathcal{K}_X$
 anstelle von $\mathcal{K}$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. : Nach (*) im Beweis zu 3.5 gilt für
 $x, y \in X$ und $t \in [0, 1]$ $d(tx + (1-t)y) \leq td(x) + (1-t)d(y)$.
 Es folgt $-\log d(tx + (1-t)y) \geq -t \log d(x) - (1-t) \log d(y)$,
 also ist $-\log d$ konvex.

2. $\Rightarrow$ 3. gilt unmittelbar.

3. $\Rightarrow$ 4. : Sei $V \in \mathcal{U}_X$ mit $d(\mathcal{K}_X(V, X)) = 0$. Dann gibt
 es eine Folge (x_n) aus $\mathcal{K}_X(V, X)$ mit $d(x_n) \rightarrow 0$. Nach
 Voraussetzung existiert eine konvexe Funktion $u \in \mathcal{K}_X$ mit
 $\sup_{n \in \mathbb{N}} u(x_n) = \infty$ im Widerspruch zu $u(x_n) \leq \sup\{u(y) \mid y \in V\} < \infty$;
 denn eine nach oben halbstetige Funktion ist auf jeder kompakten

Menge beschränkt.

$4^0 \Rightarrow 1^0$ folgt wie im letzten Beweis: Mit $x, y \in X$

$$\text{Co}\{x, y\} = \hat{K}_X(\{x, y\}, X) \subset X.$$

$1^0 \Rightarrow 5^0$ läßt sich aufgrund von 3.3 wie zum letzten Satz beweisen.

Schließlich sei noch zum Vergleich und für spätere Zwecke die Charakterisierung der pseudokonvexen Gebiete zitiert:

3.7 Definition: Eine Funktion $u: X \rightarrow [-\infty, \infty[$ auf einer offenen Menge $X \subset \mathbb{E}$ heißt pseudokonvex (auch: plurisubharmonisch), wenn gilt (LELONG [23]) :

1^0 u ist nach oben halbstetig.

2^0 u ist auf jeder Kreisscheibe $\{x + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset X$ subharmonisch. Das bedeutet:

$$u(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + e^{i\vartheta} a) d\vartheta.$$

Eine Funktion $u: X \rightarrow [-\infty, \infty[$ auf dem Gebiet (X, p) über $\mathbb{E}$ heißt pseudokonvex, wenn für jeden Punkt $x \in X$ mit $B(x, r) = B$, $0 < r < d(x)$, die Funktion $u \circ (p|_B)^{-1}: B(px, r) \rightarrow [-\infty, \infty[$ pseudokonvex ist. Mit P_X werde die Menge der pseudokonvexen Funktionen auf dem Gebiet X bezeichnet.

Ist $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ analytisch, so ist die Funktion

$\|f\|: X \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ pseudokonvex (Cauchy-Integral).

Dasselbe gilt für die Funktion $\log \|f\|$ [23, Prop. 2.6] .

Nach COEURE [11, th. 10.1] gilt:

3.8 Satz: Sei (X, p) Gebiet über dem Banachraum E .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1° $-\log d$ ist pseudokonvex.
- 2° Zu jeder Folge (x_n) aus X mit $d(x_n) \rightarrow 0$ gibt es eine pseudokonvexe Funktion $u \in P_X$ mit $\sup_{\mathbb{N}} u(x_n) = \infty$.
- 3° Für jede kompakte Menge $K \subset X$ gilt: $d(\hat{P}_X(K, X)) > 0$.

Ein Gebiet, daß eine dieser drei Eigenschaften erfüllt, heißt pseudokonvex.

§ 4. Unbeschränkte analytische Funktionen

Im zweiten Paragraphen wurde die Existenz der Holomorphiehülle $H(X)$ eines Gebietes X bewiesen. Im Falle eines Gebietes über $\mathbb{C}^n$ weiß man, daß $H(X)$ Holomorphiegebiet, das heißt Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß $H(X)$ holomorph-konvex ist [27], [18]:

4.1 Ein Gebiet X aus $\mathbb{C}^n$ heißt holomorph-konvex, wenn eine der beiden gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist:

1° Für jede kompakte Menge $K \subset X$ gilt $d(\hat{O}_X(K, X)) > 0$.

2° Zu jeder Folge (x_n) aus X ohne Häufungspunkt gibt es eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}_X$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, wird man versuchen, auch für den unendlichdimensionalen Fall einen Zusammenhang zwischen Fortsetzungseigenschaften (Holomorphiegebiet, Holomorphiehülle) und "Holomorphie-Konvexität" herzustellen. Dazu muß man geeignete Konvexitätsbegriffe finden. Während nun Holomorphiegebiete die Bedingung 4.1.1° erfüllen, ist das für die zweite Eigenschaft 4.1.2° nicht einmal im Falle $X = \mathbb{E}$ trivial, denn eine Folge ohne Häufungspunkt kann ja in unendlichdimensionalen Banachräumen beschränkt sein.

ALEXANDER [1] hat dieses Problem aus anderen Gründen aufgestellt und gezeigt, daß der Banachraum $\mathbb{E} = l_2$ die Bedingung 4.1.2° erfüllt. In diesem Paragraphen wird das Ergebnis von ALEXANDER auf eine größere Klasse von Banachräumen ausgedehnt.

Insbesondere sind die separablen und reflexiven Banachräume in dieser Klasse enthalten.

Der folgende Satz ist inzwischen bekannt, wurde aber unabhängig von den Ergebnissen bei DINEEN [14] und HIRSCHOWITZ [20] gefunden. Für die kommenden Paragraphen ist vor allem der (andersartige) Beweis des Satzes interessant, denn er gibt Anlaß, einen Konvexitätsbegriff einzuführen, der es gestattet, einen Teil der klassischen Beweismethoden auf den unendlichdimensionalen Fall zu übertragen.

4.2 Satz: Ist E ein separabler Banachraum und (x_n) eine Folge aus E ohne Häufungspunkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\|x_n - x_m\| \geq 2\varepsilon > 0$ für $n \neq m$ angenommen werden. Sei (z_j) eine in E dichte Folge und $B_j = B(z_j, \varepsilon)$ für $j \in \mathbb{N}$. Wir setzen $K_m = \overline{\bigcup_{j \leq m} B_j}$ für $m \in \mathbb{N}$. K_m läßt sich von endlich vielen offenen Kugeln vom Radius 2ε überdecken, denn nach Hilfssatz 3.1 gilt $K_m = \overline{\bigcup_{t \in T} B(t)}$, und die Menge $\text{Co}\{z_1, z_2, \dots, z_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^m t_j z_j \mid (t_1, t_2, \dots, t_m) \in T \right\}$ ist kompakt. Also gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $N_m \in \mathbb{N}$, so daß $x_n \notin K_m$ für alle $n \geq N_m$ gilt. Es kann daher $x_m \in K_{m+1} \setminus K_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ angenommen werden (gegebenenfalls muß man zu Teilfolgen übergehen). Nach Konstruktion ist $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_m$, $K_m \subset K_{m+1}$ und $K_m \in \mathfrak{B}_\infty(E)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Hilfssatz 3.3 ist

$K_m = \hat{A}_\infty(K_m, \mathbb{E})$, denn es gilt $K_m \subset \hat{A}_\infty(K_m, \mathbb{E}) \subset \hat{L}(K_m, \mathbb{E}) = \overline{\text{Co}K_m} = K_m$.
 Es gibt also zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $f_m \in A_\infty$ (sogar $f_m \in L$) mit $|f_m(x_m)| > \|f_m\|_{K_m}$. Durch Induktion läßt sich dann eine Folge $(g_m \mid m \in \mathbb{N})$ von holomorphen Funktionen $g_m \in A_\infty$ definieren mit: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt
 i) $\|g_m\|_{K_m} < 2^{-m}$ und ii) $|g_m(x_m)| \geq m + 1 + \sum_{j=1}^{m-1} |g_j(x_m)|$.
 Die Reihe $\sum g_m$ konvergiert wegen i) lokal gleichmäßig auf $\mathbb{E}$, also ist $f = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$ eine analytische Funktion aus $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$ (1.7). Wegen ii) gilt $|f(x_m)| \geq m$, das bedeutet $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.

4.3 Anmerkung: Ist die Folge (x_n) beschränkt, so gilt $f \notin A_\infty$, folglich ist $A_\infty \not\subset \mathcal{O}_X$, falls $\dim \mathbb{E} = \infty$. Sei $\mathfrak{B}_\varepsilon = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{E}\}$ und analog zu 3.4.2^o $A_\varepsilon = \{f \mid f \in \mathcal{O}_{\mathbb{E}}, f \text{ ist auf allen } V \in \mathfrak{B}_\varepsilon \text{ beschränkt}\}$. Dann gilt für die im Beweis konstruierte Funktion: $f \in A_\varepsilon$. Solche Funktionenräume werden wir im nächsten Paragraphen weiter untersuchen.

4.4 Corollar: Eine Menge $V \subset X$ in einem Gebiet (X, p) über $\mathbb{E}$ heiße A -beschränkt für eine Klasse $A \subset \mathcal{O}_X$ von holomorphen Funktionen, wenn jede Funktion $f \in A$ auf V beschränkt ist. Satz 4.2 liest sich dann: Die $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$ -beschränkten Mengen in einem separablen Banachraum $\mathbb{E}$ sind genau die relativ-kompakten Mengen.

4.5 Corollar: Aus dem Beweis zu Satz 4.2 ergibt sich noch die folgende Aussage: Ist (x_n) eine Folge ohne

Häufungspunkt aus einem Banachraum E , so gibt es ein konvexes Gebiet $X \subset E$ mit $x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.

Im Beweis zu 4.2 nehme man statt (z_j) die Folge (x_n) selbst, konstruiere wie dort K_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ und setze dann $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$.

Um Satz 4.2 auf weitere Banachräume auszudehnen, benötigen wir die folgenden Definitionen:

4.6 Definition: Sei E ein Banachraum.

1° E hat die Eigenschaft (SP), wenn es zu jedem separablen Unterraum $E_1 \subset E$ einen separablen direkten Unterraum $E_2 \subset E$ mit $E_1 \subset E_2$ gibt.

2° E heißt schwach-kompakt-erzeugt, wenn es eine schwach kompakte Menge $K \subset E$ gibt, so daß die lineare Hülle von K in E dicht liegt [2].

Ein (SP)-Raum hat also "genügend viele" stetige Projektionen $E \rightarrow E$ mit separablem Bildraum.

Jeder reflexive Banachraum E ist ein schwach-kompakt-erzeugter Banachraum, denn die abgeschlossene Einheitskugel von E ist schwach kompakt.

4.2* Man sieht sofort, daß jeder Banachraum mit der Eigenschaft (SP) auch Satz 4.2 erfüllt.

Ist nämlich (x_n) eine Folge ohne Häufungspunkt aus dem (SP)-Raum E , so gibt es nach Voraussetzung einen separablen direkten Unterraum $E_2 \subset E$ mit $x_n \in E_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie in 4.2 findet man eine analytische Funktion $f: E_2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$, und f läßt sich trivial zu einer analytischen Funktion auf ganz E fortsetzen.

Daß unter anderem die reflexiven Banachräume zu den (SP)-Räumen gehören, ergibt sich aus einer Arbeit von AMIR-LINDEN-STRAUSS [2] :

4.7 Lemma: Jeder schwach-kompakt-erzeugte Banachraum ist ein (SP)-Raum.

Für unsere Aussage 4.7 wird nur der erste Teil des Beweises zum Lemma 4 in [2, S. 43] (Fall $m = \aleph_0$) zusammen mit der Schlußbemerkung in [2] benötigt.

Aus 3.5 und 4.2* folgt noch:

4.8 Corollar: Ist (x_n) eine Folge ohne Häufungspunkt aus dem konvexen Gebiet $X \subset E$ eines (SP)-Raumes E , so gibt es eine analytische Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.

Corollar 4.8 bleibt richtig für Gebiete X , die bezüglich einer Verallgemeinerung im Sinne von 4.1.1^o konvex sind (vgl. Definition 5.11 und Satz 7.9).

[illegible]

§ 5. Satz von CARTAN-THULLEN und reguläre Klassen

Zu Beginn dieses Paragraphen wollen wir Bezeichnungen aus § 1 auf nichtschlichte Gebiete übertragen. Sei (X, p) Gebiet über dem Banachraum E und $U \subset X$ eine offene Menge. Nach der durch p definierten analytischen Struktur auf X ist eine Abbildung $f: U \rightarrow F$ in einen Banachraum F genau dann analytisch, wenn es zu jedem Punkte $x \in U$ ein $r \in \mathbb{R}_+$, $r < d(x)$, so gibt, daß mit $B = B(x, r) \subset U$ die Abbildung $f \circ (p|_B)^{-1}: B(p_x, r) \rightarrow F$ analytisch ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir für $n \in \mathbb{N}$ $P^n f(x) = P^n f \circ (p|_B)^{-1}(p_x)$ und für $a \in E$ wieder $P_a^n f: U \ni x \mapsto P^n f(x).a \in F$. Dann sind die Abbildungen $P^n f: U \rightarrow \mathcal{P}^n(E, F)$ und $P_a^n f: U \rightarrow F$ analytisch. Definieren wir wie in 1.3.3^o den Konvergenzradius von f im Punkte $x \in U$ als

$$\rho_f(x) = \sup\{r \mid r \in \mathbb{R}_+, \sum_{0 \leq n} \|P^n f(x)\| r^n < \infty\},$$

so hat f für $r \in \mathbb{R}_+$ mit $r < \min\{\rho_f(x), d(x)\}$ die (gleichmäßig konvergente) Entwicklung $f(y) = \sum_{0 \leq n} P^n f(x). (p_y - p_x)^n$, $y \in U \cap B(x, r)$.

Ist $(X, J, \underline{A})$ simultane analytische Fortsetzung einer Familie A von analytischen Abbildungen auf X mit Werten in Banachräumen, so gilt für $f \in A$: $\rho_f = \rho_{\underline{f}} \circ J$, falls $f = \underline{f} \circ J$.

Wie in schlichten Gebieten gilt:

5.1 Sei $f: X \rightarrow F$ analytisch, $x \in X$ und $r > 0$. Dann folgt:

- 1° Ist f beschränkt auf $B(x, r) \subset X$, so gilt $\rho_f(x) \geq r$.
 2° Gilt $r < \min\{\rho_f(x), d(x)\}$, so ist f beschränkt auf $B(x, r)$.
 3° Für $y \in B(x, \min\{\rho_f(x), d(x)\})$ gilt:
 $\rho_f(y) \geq \rho_f(x) - \|py - px\|$.
 4° $\rho_f: X \rightarrow]0, \infty]$ ist stetig.
 5° $-\log \rho_f: X \rightarrow [-\infty, \infty[$ ist pseudokonvex.

Beweis: 1° und 2° wurden bereits in 1.3.3° formuliert. 3° folgt aus 1° und 2°: Zunächst kann angenommen werden, daß X die maximale Fortsetzung von f ist, denn es gilt $\rho_f = \rho_{\underline{f}} \circ j$ für jede Fortsetzung $(X, j, \underline{f})$ von f . Also kann $\rho = \rho_f \leq d$ vorausgesetzt werden. Nach 2° ist f auf jeder Kugel $B(y, r - \|px - py\|) \subset B(x, r)$ beschränkt, falls $r < \rho(x)$. Nach 1° folgt $\rho(y) \geq r - \|py - px\|$, also 3°.

Zu 4° zeigen wir für $y \in B(x, d(x))$ (falls $\rho_f < \infty$):
 $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \|px - py\|$, das heißt, ρ_f ist lokal Lipschitzstetig mit Konstante 1. Es gilt nämlich
 $\rho(x) \leq \|py - px\| + \rho(y)$, sonst hätte man nach 3° wegen
 $y \in B(x, \min\{\rho(x), d(x)\})$: $\rho(y) \geq \rho(x) - \|py - px\| > \rho(y)$.
 Ebenso ist $\rho(y) \leq \|py - px\| + \rho(x)$ und damit
 $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \|py - px\|$.

Zu 5°: Mit f ist auch $P^n f: X \rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ analytisch und daher $\log \|P^n f\|: X \rightarrow [-\infty, \infty[$ pseudokonvex (3.7).
 Die Funktion $u = \limsup_{0 \leq n} (\frac{1}{n} \log \|P^n f\|)$ hat als Regularisierte u^* (u^* ist das Infimum aller nach oben halbstetigen Funktionen v auf X mit $v \geq u$) eine pseudokonvexe Funktion [11, th. 3.1]. Da die Funktion $u = -\log \rho_f = \limsup_{0 \leq n} (\frac{1}{n} \log \|P^n f\|)$

stetig ist, also insbesondere nach oben halbstetig, ist die Regularisierte u^* bereits gleich $-\log \rho_f$, das heißt, $-\log \rho_f$ ist pseudokonvex.

Der Beweis zu 4^0 liefert zugleich einen Beweis für die Aussage, daß die Randdistanz d lokal lipschitzstetig und damit stetig ist, was in 2.2.1⁰ festgestellt wurde.

5.2 Corollar: Sei A eine Familie von analytischen Abbildungen auf dem Gebiet (X, p) über E mit Werten in Banachräumen. Dann erfüllt $\rho_A = \inf\{\rho_f \mid f \in A\}$ die Eigenschaften 5.1.1⁰ - 5⁰ sinngemäß:

1⁰ Sind alle $f \in A$ auf $B(x, r) \subset X$ beschränkt, so gilt $\rho_A(x) \geq r$.

2⁰ Gilt $r < \min\{\rho_A(x), d(x)\}$, so ist jedes $f \in A$ beschränkt auf $B(x, r)$.

3⁰ Für $y \in B(x, \min\{\rho_A(x), d(x)\})$ gilt:

$\rho_A(y) \geq \rho_A(x) - \|py - px\|$.

4⁰ $\rho_A: X \rightarrow [0, \infty]$ ist stetig.

5⁰ $-\log \rho_A: X \rightarrow [-\infty, \infty[$ ist pseudokonvex, falls $\rho_A > 0$.

Beweis: 1⁰ - 3⁰ folgen unmittelbar aus 5.1. Zu 4⁰ zeigen wir wieder, falls $\rho_A < \infty$: Für $y \in B(x, d(x))$ gilt $|\rho_A(x) - \rho_A(y)| \leq \|px - py\|$. Sei $\rho_A(x) \leq \rho_A(y)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $f \in A$ mit $\rho_f(x) < \rho_A(x) + \varepsilon$. Es folgt $0 \leq \rho_A(y) - \rho_A(x) < \rho_A(y) - \rho_f(x) + \varepsilon \leq \rho_f(y) - \rho_f(x) + \varepsilon \leq \|px - py\| + \varepsilon$. Also gilt $0 \leq \rho_A(y) - \rho_A(x) \leq \|px - py\|$.

5⁰ folgt wegen $-\log \rho_A = \sup\{-\log \rho_f \mid f \in A\}$, und da

ρ_A stetig ist, wieder aus th. 3.1 in [11].

Aus 3.8 folgt jetzt: Ist A eine Familie von analytischen Abbildungen mit Werten in Banachräumen und gilt $0 < \rho_A \leq d$, so ist X pseudokonvex.

Wir wollen jetzt einen einfachen Fall von simultaner analytischer Fortsetzung betrachten:

5.3 Sei A eine Klasse von analytischen Abbildungen auf dem Gebiet (X, p) über $\mathbb{E}$ mit Werten in Banachräumen. Wir nehmen an, daß es einen Punkt $x \in X$ und ein $r > 0$ mit $d(x) < r \leq \rho_A(x)$ gibt. In der nach 2.6 gebildeten maximalen Fortsetzung $(\underline{X}, \underline{j}, \underline{A})$ von A hat $\underline{j}x \in \underline{X}$ eine Randdistanz größer oder gleich $\rho_A(x)$: $d_{\underline{X}}(\underline{j}x) \geq \rho_A(x)$. Denn die Menge $\{(px + a, ((f \circ p^{-1})_{px+a} | f \in A)) \mid a \in \mathbb{E}, \|a\| < \rho_A(x)\}$ gehört offenbar zu $\underline{X}$ und wird durch $\underline{p}: \underline{X} \rightarrow \mathbb{E}$ auf $B(px, \rho_A(x))$ abgebildet, ist also gleich $B(\underline{j}x, \rho_A(x)) \subset \underline{X}$. Sei $\tilde{X} = \underline{j}X \cup B(\underline{j}x, r)$, $\tilde{A} = (\underline{f}|_{\tilde{X}} \mid \underline{f} \in \underline{A})$, $\tilde{p} = \underline{p}|_{\tilde{X}}$ und $\tilde{j}: X \rightarrow \tilde{X}$ die Restriktion von $\underline{j}$. Dann ist $(\tilde{X}, \tilde{j}, \tilde{A})$ Fortsetzung von A , im folgenden meist "Fortsetzung von A nach $B(x, r)$ " genannt. Man kann diese Fortsetzung auch erhalten, indem man auf der punktfremden Vereinigung von X und $B(px, r)$ geeignete Punkte identifiziert und dann die Fortsetzung zu jedem $f \in A$ durch die Potenzreihenentwicklung direkt definiert ("Kugelkettenverfahren").

Zur Formulierung des nächsten Satzes noch die folgenden

Bezeichnungen und Definitionen:

5.4 Definition: Sei (X, ρ) Gebiet über E mit Randdistanz d .

1° Ist $V \subset X$ mit $dV = \inf\{d(x) \mid x \in V\} > 0$, so sei für $s \in \mathbb{R}_+$, $s < dV$, definiert: $V_s = \bigcup\{B(x, s) \mid x \in V\}$.

2° $A \subset \mathcal{O}_X$ heißt reguläre Klasse (von holomorphen Funktionen auf X , vgl. [3, S. 121]), wenn gilt:

- i) Für alle $f \in A$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt $f^m \in A$.
- ii) Für alle $f \in A$, $a \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $P_a^n f \in A$.
- iii) Für alle $x \in X$ gilt $\rho_A(x) > 0$, also $\rho_A > 0$.

Jede im Sinne von BEHNKE-THULLEN [3] reguläre Klasse ist eine reguläre Klasse im Sinne der Definition 5.4.2°. In Gebieten über dem $\mathbb{C}^n$ ist nämlich die Eigenschaft iii) für jede Klasse analytischer Abbildungen mit Werten in Banachräumen erfüllt, da stets gilt $0 < d \leq \rho_A$. Im allgemeinen ist das nicht richtig, zum Beispiel gibt es aufgrund der Ergebnisse von § 4 in einem unendlichdimensionalen separablen (oder (SP)-) Banachraum E zu jedem $x \in E$ und $r > 0$ eine analytische Funktion $f \in \mathcal{O}_E$ mit $\rho_f(x) \leq r$: In dem Satz 4.2 wähle man dazu eine Folge (x_n) aus $B(x, r)$ ohne Häufungspunkt. Es gilt also für $x \in E$ stets $\rho_{\mathcal{O}_E}(x) = 0$.

Wenn jetzt für eine beliebige Klasse analytischer Abbildungen mit Werten in Banachräumen $\rho_A \leq d$ gilt, so folgt im Falle $E = \mathbb{C}^n$, daß X ein Holomorphiegebiet ist; im allgemeinen liefert die Bedingung $\rho_A \leq d$ aber wenig Information, da $\rho_A = 0$ möglich ist. Insbesondere kann es echte Fortsetzungen

von A geben. Aus diesem Grunde haben wir in Definition 5.4.2^o die Bedingung $\rho_A > 0$ für eine reguläre Klasse A gefordert. In den folgenden Paragraphen wird sich ergeben, daß bei regulären Klassen die Eigenschaft $\rho_A \leq d$ in vielen Fällen impliziert, daß X bereits maximale Fortsetzung von A ist.

Übrigens ist die Eigenschaft $\rho_{0_E} = 0$ in Banachräumen E jedenfalls dann erfüllt, wenn die 0_E -beschränkten Mengen von E nirgends dichte Mengen sind. Das ist der Fall für eine große Klasse von unendlichdimensionalen Banachräumen, insbesondere auch für $E = l_\infty$ (DINEEN [14]). Es ist ein offenes Problem, ob die 0_E -beschränkten Mengen in jedem Banachraum E nirgends dicht sind.

5.5 Satz von CARTAN-THULLEN: (Fundamentalsatz in CARTAN-THULLEN [10], Satz 36 in [3]) Sei A eine reguläre Klasse im Gebiet (X, p) über E , $V \subset X$ und $s \in \mathbb{R}_+$ mit $s < dV$. Ferner sei V_s A -beschränkt. Dann gilt für alle $x \in \hat{A}(V, X)$:

1^o $s \leq \rho_A(x)$, das heißt, A läßt sich gegebenenfalls simultan nach $B(x, s)$ fortsetzen (vgl. 5.3).

2^o Ist $\tilde{f}$ Fortsetzung von $f \in A$ nach $B = B(x, s)$, so gilt $\|\tilde{f}\|_B \leq \|f\|_{V_s}$.

Beweis: 1^o: Für $y \in V$, $f \in A$, $a \in E$ mit $\|a\| \leq s$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $P^n f(y) \cdot a = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{f(y + \lambda a)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$ (vgl. 1.6). Es folgt $|P^n f(y) \cdot a| \leq \|f\|_{V_s}$ und damit für beliebige $a \in E$: $|P^n f(y) \cdot a| \leq \left(\frac{\|a\|}{s}\right)^n \|f\|_{V_s}$. Also gilt:

$$\underline{5.6} \quad \|P_a^n f\|_V \leq \left(\frac{\|a\|}{s}\right)^n \|f\|_{V_s} .$$

Wegen $x \in \hat{A}(V, X)$ und $P_a^n f \in A$ ist daher

$$|P_a^n f(x)| \leq \left(\frac{\|a\|}{s}\right)^n \|f\|_{V_s}, \text{ das hei\ss}t \quad \|P^n f(x)\| \leq s^{-n} \|f\|_{V_s} .$$

Es folgt $\rho_f(x) \geq s$ f\u00fcr alle $f \in A$ und damit die Behauptung $\rho_A(x) \geq s$.

Zu 2^o: F\u00fcr $x' \in \overline{B(x, s-\epsilon)}$, $0 < \epsilon < s$, gilt

$$\tilde{f}(x') = \sum_{0 \leq n} P^n f(x) \cdot (\tilde{p}x' - px) , \text{ also}$$

$$|\tilde{f}(x')| \leq \sum_{0 \leq n} \|P^n f(x)\| (s-\epsilon)^n \leq \sum_{0 \leq n} \left(\frac{s-\epsilon}{s}\right)^n \|f\|_{V_s} . \text{ Da diese}$$

Ungleichung f\u00fcr alle Potenzen $f^m \in A$ von f richtig ist,

$$\text{folgt } \|\tilde{f}\|_{\overline{B(x, s-\epsilon)}} \leq \|f\|_{V_s} \text{ f\u00fcr alle } 0 < \epsilon < s \text{ und damit}$$

$$\text{die Behauptung } \|\tilde{f}\|_B \leq \|f\|_{V_s} .$$

5.7 Corollar: Sei $f: X \rightarrow F$ eine analytische Abbildung und $A = \{P_a^n f \mid n \in \mathbb{N}, a \in E\}$. Aus dem Beweis zu 5.5.1^o l\u00e4\u00dft sich ablesen: Ist $\|f\|_{V_s} < \infty$ f\u00fcr eine Menge $V \subset X$, $0 < s < dV$, so gilt $s \leq \rho_f(x)$ f\u00fcr alle $x \in \hat{A}(V, X)$.

5.8 Corollar: Aus Satz 5.5 folgt f\u00fcr $A = A_\infty$ folgende Konvexit\u00e4tseigenschaft: Ist (X, p) bereits maximale simultane Fortsetzung von A , so gilt f\u00fcr alle $V \in \mathfrak{B}_\infty$ $d(A(V, X)) = dV$. Die Umkehrung dieser Aussage wird sp\u00e4ter gezeigt (7.10).

5.9 Beispiele von regul\u00e4ren Klassen:

1^o Die "Polynome" $\{f \circ p \mid f \in \bigoplus_{0 \leq n} \mathcal{P}^n(E, \mathbb{C})\}$ bilden eine

reguläre Klasse.

2° Eine Überdeckung $\mathfrak{B}$ von X heißt zulässig, wenn gilt:
 i) $X = \bigcup \{U \mid U \in \mathfrak{B}\}$. ii) Zu jedem $U \in \mathfrak{B}$ gibt es $s > 0$
 und $V \in \mathfrak{B}$ mit $s < dU$ und $U_s \subset V$. iii) Mit $U_1, U_2, \dots$
 $U_m \in \mathfrak{B}$ gilt stets $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m \in \mathfrak{B}$.

Ist $\mathfrak{B}$ eine zulässige Überdeckung von X , so ist
 $A_{\mathfrak{B}} = \{f \mid f \in \mathcal{O}_X, \text{ für alle } U \in \mathfrak{B} \text{ gilt } \|f\|_U < \infty\}$ eine
 reguläre Klasse und zugleich $\mathbb{C}$ -Algebra. Beweis: Seien $f, g \in A_{\mathfrak{B}}$
 und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Für $U \in \mathfrak{B}$ gilt $\|f\|_U < \infty$ und $\|g\|_U < \infty$, also
 auch $\|fg\|_U < \infty$ und $\|\alpha f + \beta g\|_U < \infty$. Zu $U \in \mathfrak{B}$ seien $s > 0$
 und $V \in \mathfrak{B}$ mit $s < dU$ und $U_s \subset V$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ und
 $a \in \mathbb{E}$ gilt wie 5.6: $\|P_a^n f\|_U \leq (\frac{\|a\|}{s})^n \|f\|_{U_s} \leq (\frac{\|a\|}{s})^n \|f\|_V < \infty$,
 also gehört $P_a^n f$ zu $A_{\mathfrak{B}}$. $\rho_{A_{\mathfrak{B}}} > 0$ folgt schließlich aus i)
 nach 5.1.1°.

Im Falle $\mathbb{E} = \mathbb{C}^n$ hat man übrigens $A_{\mathfrak{B}} = \mathcal{O}_X$, falls jede
 Menge $U \in \mathfrak{B}$ relativ-kompakt ist. Im allgemeinen ist das nicht
 richtig (vgl. 4.2).

3° Sei $\tau: X \rightarrow [0, \infty]$ stetig und $A_{\tau} = \{f \mid f \in \mathcal{O}_X \text{ und } \rho_f \geq \min\{\tau, d\}\}$ (vgl. [11, S. 398]). Dann ist A_{τ} reguläre
 Klasse und $\mathbb{C}$ -Algebra. Sei nämlich $\mathfrak{B}_{\tau}(X) = \mathfrak{B}_{\tau} = \{U \mid U \subset X, \text{ es gibt } x_1, x_2, \dots, x_m \in X \text{ und } r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } 0 < r_{\mu} < \min\{\tau(x_{\mu}), d(x_{\mu})\} \text{ für } \mu = 1, 2, \dots, m \text{ so daß } U \subset \bigcup_{\mu=1}^m B(x_{\mu}, r_{\mu})\}$. Dann ist $\mathfrak{B}_{\tau}$ zulässige Überdeckung von X
 und es gilt $A_{\tau} = A_{\mathfrak{B}_{\tau}}$. Ist A eine beliebige reguläre Klasse,
 so gilt mit $\rho = \rho_A$: $A \subset A_{\rho}$.

4° Sei $f: X \rightarrow \mathbb{E}$ analytisch. Wir setzen für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
 $V_n = \{x \mid x \in X, \|f(x)\| < n, d(x) > \frac{1}{n}\}$ und
 $U_n = \{x \mid x \in V_n, m(x, \partial V_n) > \frac{1}{n}\}$, wobei ∂V_n der Rand von V_n

und $m(x, \partial V_n) = \inf\{m(x, y) \mid y \in V_n\}$ ist (vgl. 2.2.1°) .

Die Überdeckung $\mathfrak{B} = (U_n \mid n > 0)$ ist zulässig: 1) gilt unmittelbar. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $0 < s < \frac{1}{n}$ ($\leq dU_n$) .

Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{n}{1-ns}$ und für $x \in (U_n)_s$:

$x \in V_n \subset V_k$ und $m(x, \partial V_k) \geq m(x, \partial V_n) \geq \frac{1}{n} - s > \frac{1}{k}$.

Es folgt $(U_n)_s \subset U_k$. Schließlich sind wegen $U_n \subset U_{n+1}$ endliche Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{B}$ wieder in $\mathfrak{B}$ enthalten.

Die reguläre Klasse $A_{\mathfrak{B}}$ wird meist mit A_F bezeichnet. Sei $\omega(X) = \omega$ die Menge der abzählbaren und zulässigen Überdeckungen von X . Da für $g \in \mathcal{O}_X$ stets $g \in A_g$ gilt, folgt

$$\mathcal{O}_X = \bigcup_{g \in \omega} A_g .$$

Mit $A = A_F$ im letzten Beispiel gilt fast $\rho_F = \rho_A$,
genauer:

5.10 Lemma: Sei $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ analytische Abbildung auf dem Gebiet (X, p) über $\mathbb{E}$ mit Randdistanz d . Mit $\rho = \rho_f$ und $A = A_F$ gilt dann: $\min\{d, \rho\} \leq \rho_A \leq \rho$.

Beweis: Sei $x \in X$ und $0 < r < s < \min\{d(x), \rho(x)\}$.
Dann ist f auf $B(x, s)$ beschränkt und es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $B(x, s) \subset V_n$ sowie $k \in \mathbb{N}$ mit $B(x, r) \subset U_k$. Für $g \in A$ ist daher nach 5.1 $r \leq \rho_g(x)$, also folgt $\min\{d, \rho\} \leq \rho_A$.

Zur Behauptung $\rho_A \leq \rho$ zeigen wir:

$\rho_F(x) = \inf\{\rho_{v \circ f}(x) \mid v \in \mathbb{F}'\}$. Sei $(P^{\mu} f(x) \mid \mu \in \mathbb{N})$ eine Teilfolge mit $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{\|P^{\mu} f(x)\|} = \frac{1}{\rho(x)}$ (zur Vereinfachung

lassen wir den Index μ im folgenden fort) . Zu jedem

$s \in]0, 1[$ gibt es dann eine stetige Linearform $v \in \mathbb{F}'$ mit

$\|v \circ P^n f(x)\| \geq s^n \|P^n f(x)\|$ für unendlich viele n .

Sonst hat man zu jedem $v \in F'$ ein $N(v) \in \mathbb{N}$ mit

$\|v \circ P^n f(x)\| < s^n \|P^n f(x)\|$ für alle $n \geq N(v)$. Zu jedem

$n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Vektor $a_n \in E$ mit $\|a_n\| = 1$ und

$s \|P^n f(x)\| \leq \|P^n f(x) \cdot a_n\|$. Es gilt dann

$\|v \circ P^n f(x)\| < s^{n-1} \|P^n f(x) \cdot a_n\|$ für $n \geq N(v)$. Setzt man

$b_n = s^{1-n} \frac{P^n f(x) \cdot a_n}{\|P^n f(x) \cdot a_n\|} \in F$, so folgt $|v(b_n)| < 1$ für alle

$n \geq N(v)$. $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$ ist daher eine schwach beschränkte

und damit beschränkte Folge im Widerspruch zu $\|b_n\| = s^{1-n} \rightarrow \infty$.

Jetzt gilt $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|P^n v \circ f(x)\|} \geq \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[n]{s^n \|P^n f(x)\|} = \frac{s}{\rho(x)}$,

für $s \rightarrow 1$ folgt daher $\rho_f \geq \inf\{\rho_{v \circ f} \mid v \in F'\}$. Die Ungleichung in anderer Richtung besteht wegen

$\|P^n v \circ f(x)\| = \|v \circ P^n f(x)\| \leq \|v\| \|P^n f(x)\|$ für alle $v \in F'$.

Zum Schluß dieses Paragraphen wird ein Konvexitätsbegriff eingeführt, der in enger Beziehung steht mit Fortsetzungseigenschaften analytischer Abbildungen. Motiviert ist dieser Begriff durch die Untersuchungen im dritten Paragraphen, durch den Satz 4.2 und durch den Satz von CARTAN-THULLEN.

Für einen Konvexitätsbegriff nach 4.1.1⁰ scheint uns im unendlichdimensionalen Fall die Klasse der kompakten Mengen für verschiedene Beweise zu klein zu sein, da die Gebiete nicht lokalkompakt sind. Will man in 4.1.1⁰ eine größere Klasse von Mengen zulassen, so ist es aufgrund des Satzes 4.2 vernünftig, die Klasse der Funktionen einzuschränken. Wir wollen nun ein Gebiet X A -konvex (A reguläre Klasse) nennen, wenn eine echte Fortsetzung von A nach 5.5 nicht möglich ist. Um das

präzisieren zu können, sei die folgende Bezeichnung für Mengen $V \subset X$ eingeführt:

$$\sigma_A(V) = \begin{cases} 0, & \text{falls } dV = 0 \text{ oder } V \text{ nicht } A\text{-beschränkt} \\ \sup\{s \mid 0 \leq s < dV \text{ und } V_s \text{ ist } A\text{-beschränkt}\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der erste Teil des Satzes von CARTAN-THULLEN (5.5.1⁰) liest sich jetzt: Für $V \subset X$ und $x \in \hat{A}(V, X)$ gilt $\rho_A(x) \geq \sigma_A(V)$. Wenn also stets $d(x) \geq \sigma_A(V)$ gilt, liefert der Satz keine echte Fortsetzung. Entsprechend definieren wir:

5.11 Definition: Sei A reguläre Klasse im Gebiet (X, p) über E . Dann heißt X A -konvex, wenn für alle $V \subset X$ gilt: $d(\hat{A}(V)) \geq \sigma_A(V)$. (Abkürzend wird $\hat{A}(V)$ statt $\hat{A}(V, X)$ geschrieben, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.)

5.12 Folgerung: Ein A -konvexes Gebiet ist pseudokonvex: Für eine kompakte Menge $K \subset X$ sei $R = \min\{d(K), \inf_{x \in K} \rho_A(x)\}$. Es ist $R > 0$ wegen der Stetigkeit von d und ρ_A . Für $0 < s < r < R$ gilt $K \subset \bigcup_{\mu=1}^m B(x_\mu, r-s)$ mit geeigneten $x_1, x_2, \dots, x_m \in K$, also folgt $K_s \subset \bigcup_{\mu=1}^m B(x_\mu, r)$, d.h. K_s ist A -beschränkt und es gilt $\sigma_A(K) \geq s$ für jedes $s < R$. Die Pseudokonvexität folgt jetzt aus 3.8 wegen $d(\hat{P}_X(K)) \geq d(\hat{A}(K)) \geq \sigma_A(K) \geq R > 0$.

Man hat die folgende einfache Charakterisierung:

5.13 Satz: Das Gebiet X ist genau dann A -konvex für eine reguläre Klasse A , wenn für jede Menge $V \subset X$ mit $\sigma_A(V) > 0$ gilt: $d(\hat{A}(V)) > 0$.

Beweis: Ist X A -konvex, so ist die angegebene Bedingung sofort erfüllt. Umgekehrt sei $V \subset X$ mit $d(\hat{A}(V)) < \sigma_A(V)$. Dann gibt es einen Punkt $x \in \hat{A}(V)$ mit $s = d(x) < \sigma_A(V)$ und $\sigma_A(V) \leq \rho_A(x)$ (5.5.1^o). Nach 5.5.2^o gilt für $B = B(x, s)$: $\|f\|_B \leq \|f\|_{V_s}$ für alle $f \in A$, also $B \subset \hat{A}(V_s)$. Es folgt $\sigma_A(V_s) = \sigma_A(V) - s > 0$ und $d(\hat{A}(V_s)) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ein hinreichendes Kriterium für die A -Konvexität läßt sich folgendermaßen angeben:

5.14 Kriterium: Sei A reguläre Klasse im Gebiet X . X ist bereits A -konvex, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$1^o \quad \rho_A(x) \leq d(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

$$2^o \quad \limsup_{d(x) \rightarrow 0} \rho_A(x) = 0$$

Beweis: Ist X nicht A -konvex, so gibt es $V \subset X$ mit $d(\hat{A}(V)) < \sigma_A(V)$, also $x \in \hat{A}(V)$ mit $d(x) < \sigma_A(V) \leq \rho_A(x)$, das heißt, 1^o ist verletzt. Daher folgt aus 1^o die A -Konvexität von X .

Zur Äquivalenz von 1^o und 2^o : 2^o folgt aus 1^o unmittelbar. Sei umgekehrt $x \in X$ mit $\rho_A(x) > d(x)$. Mit $r = \rho_A(x) - d(x) > 0$ gilt für $y \in B(x, d(x))$: (5.2.3^o) $\rho_A(y) \geq \rho_A(x) - \|py - px\| = d(x) - \|py - px\| + r \geq r$. Es folgt $\limsup_N \rho_A(y_n) \geq r$ für jede Folge (y_n) aus $B(x, d(x))$ mit $d(y_n) \rightarrow 0$. Also ist die Bedingung 2^o verletzt, und wir haben $2^o \Rightarrow 1^o$ gezeigt.

5.15 Anmerkungen:

1° Eigenschaft 5.14.2° wird bei COEURE [11, S. 400] als Definition für "Holomorphiegebiet" genommen. Es wird in [11] aber nicht mehr gezeigt, als daß ein Gebiet mit der Eigenschaft 5.14.2° pseudokonvex ist.

2° Im siebten Paragraphen wird gezeigt, daß für die wichtigsten regulären Klassen auch die Umkehrung in 5.14 gilt: A-konvexe Gebiete erfüllen 1° und 2° (7.5). Um diese und weitere Ergebnisse zu erhalten, werden im folgenden Paragraphen geeignete Topologien auf regulären Klassen definiert und untersucht.

§ 6. Topologische Vektorräume analytischer Funktionen

Im zweiten Paragraphen haben wir die folgende Aussage vorausgesetzt:

6.1 Satz: Ist (X, p) Gebiet über dem Banachraum E und $(\underline{X}, j, \mathcal{O}_{\underline{X}})$ analytische Fortsetzung von $\mathcal{O}_X$ ($= \mathcal{O}_X(X, \mathbb{C})$), so läßt sich jede analytische Abbildung $f: X \rightarrow F$ in den Banachraum F zu einer analytischen Abbildung $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow F$ fortsetzen.

Beweis für $E = \mathbb{C}^n$: 6.1 läßt sich unmittelbar mit Hilfe der Formel $\mathcal{O}_X(F) = \mathcal{O}_X \varepsilon F$ (1.10) zeigen: f definiert ein Element $f^*: F'_C \ni v \mapsto v \circ f \in \mathcal{O}_X$ aus $\mathcal{O}_X \varepsilon F$. Wegen $E = \mathbb{C}^n$ sind $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_{\underline{X}}$ Frécheträume bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz, also ist die bijektive, lineare und stetige Abbildung $j^*: \mathcal{O}_{\underline{X}} \ni g \mapsto g \circ j \in \mathcal{O}_X$ topologisch nach dem Satz von der offenen Abbildung [6, S. 25]. Durch $(j^*)^{-1} \circ f^*: F'_C \rightarrow \mathcal{O}_{\underline{X}}$, $(j^*)^{-1} \circ f^* \in \mathcal{O}_{\underline{X}} \varepsilon F$, ist deshalb eine analytische Abbildung $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow F$ mit $f = \underline{f} \circ j$ gegeben.

6.2 Anmerkung: Der Beweis ist im Falle $\dim E = \infty$ gültig für Fortsetzungen $(\underline{X}, j, \mathcal{O}_{\underline{X}})$ von $\mathcal{O}_X$, bei denen die Abbildung $j^*: \mathcal{O}_{\underline{X}} \rightarrow \mathcal{O}_X$ offen bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz ist. Solche Fortsetzungen nennt ALEXANDER [1] "normale" Fortsetzungen. Es ist ein offenes Problem, ob jede Fortsetzung von $\mathcal{O}_X$ normal ist. Der Satz von der offenen

Abbildung (nebst Verallgemeinerungen) läßt sich nicht unmittelbar anwenden, denn $(\mathcal{O}_X, c)$ (c sei die Topologie der kompakten Konvergenz) ist weder metrisierbar noch tonneliert, falls $\dim \mathbb{E} = \infty$ (ALEXANDER [1, S. 13, 39]). Es ist daher fraglich, ob c wie im endlichdimensionalen Fall die natürliche Topologie auf $\mathcal{O}_X$ ist; und man ist dazu übergegangen, andere Topologien auf $\mathcal{O}_X$ zu untersuchen. ALEXANDER stellt noch fest, daß "Tonneliertheit" aus verschiedenen Gründen eine brauchbare Eigenschaft für eine Topologie auf $\mathcal{O}_X$ ist [1, S. 37].

HIRSCHOWITZ kommt in [22] mit der zu c assoziierten bornologischen Topologie c_0 (c_0 ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{O}_X$ mit den gleichen beschränkten Mengen wie c , vgl. [28, S. 63]), die ja tonneliert ist, zu folgendem Ergebnis: $j^*: (\mathcal{O}_X, c_0) \rightarrow (\mathcal{O}_X, c)$ ist topologisch und es gilt 6.1. Wir erhalten diese Aussagen auf anderen Wegen als in [22], im wesentlichen mit dem Satz von CARTAN-THULLEN. Zu diesem Zweck untersuchen wir geeignete Topologien auf regulären Klassen.

6.3 Satz: Sei (X, p) Gebiet über $\mathbb{E}$, $\mathfrak{B}$ eine zulässige Überdeckung von X und $\mathbb{E}$ ein Banachraum. Auf dem Vektorraum $A = A_{\mathfrak{B}} = \{f \mid f \in \mathcal{O}_X(X, \mathbb{E}) \text{ und für alle } U \in \mathfrak{B} \text{ gilt } \|f\|_U < \infty\}$ sei die Topologie der $\mathfrak{B}$ -Konvergenz gegeben (Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen aus $\mathfrak{B}$). Dann gilt:

1° A ist ein vollständiger, Hausdorffscher und lokal-konvexer Vektorraum.

2° Ist $\mathbb{E}$ Banachalgebra, so ist A topologische Algebra.

3° Ist $\mathfrak{B}$ abzählbar, so ist A Fréchetraum (-algebra).

Beweis: Die Topologie auf A wird durch die Seminormfamilie $(\| \cdot \|_U \mid U \in \mathfrak{B})$, $\| \cdot \|_U: A \ni f \mapsto \|f\|_U \in [0, \infty[$, erzeugt und ist daher lokalkonvex und feiner als die Topologie der kompakten Konvergenz, also Hausdorffsch. Der Raum $\mathfrak{B}(X, \mathbb{F})$ der auf allen $U \in \mathfrak{B}$ beschränkten Abbildungen $g: X \rightarrow \mathbb{F}$ ist vollständig in der $\mathfrak{B}$ -Topologie [5, §3. Cor.1]. Also genügt es zu zeigen, daß A abgeschlossen in $\mathfrak{B}(X, \mathbb{F})$ ist: Sei $f \in \overline{A}$. Zu $x \in X$ gibt es $U \in \mathfrak{B}$ mit $x \in \overset{\circ}{U}$. Wegen $f \in \overline{A}$ existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in A$ mit $\|f - f_n\|_U < 2^{-n}$, also ist f nach dem Konvergenzsatz 1.7 analytisch in $\overset{\circ}{U}$ und dann auch in X . Das bedeutet $A = \overline{A}$.

Falls $\mathbb{F}$ Banachalgebra ist, gilt für $U \in \mathfrak{B}$ und $f, g \in A$: $\|fg\|_U = \sup\{\|f(x)g(x)\| \mid x \in U\} \leq \sup\{\|f(x)\| \|g(x)\| \mid x \in U\}$, also $\|fg\|_U \leq \|f\|_U \|g\|_U$.

Ist $\mathfrak{B}$ abzählbar, so ist für $f \in A$ durch $\|f\| = \sum_{0 \leq n} 2^{-n} \|f\|_{U_n} (1 + \|f\|_{U_n})^{-1}$ eine geeignete Fréchetnorm auf A definiert.

6.4 Bemerkung: Im allgemeinen ist $A_{\mathfrak{B}}$ nicht Fréchetraum. Es gibt Räume A_{τ} (vgl. 5.9.3^o), die weder tonnelliert noch bornologisch sind.

Für unser Beispiel benötigen wir das bereits zitierte Ergebnis von DINEEN [13]: In $\mathbb{E} = l_{\infty}$ ist die Menge $D = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Vektoren $e_n = (\delta_{jn} \mid j \in \mathbb{N})$ eine $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$ -beschränkte Menge (4.4). Sei $\tau: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig und $A_{\tau} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{E}}$ wie in 5.9.3^o, versehen mit der $\mathfrak{B}_{\tau}$ -Topologie.

$\| \cdot \|_D: A_\tau \ni f \mapsto \|f\|_D \in [0, \infty[$ ist dann eine wohldefinierte Seminorm und $T = \{f \mid f \in A_\tau, \|f\|_D \leq 1\}$ ist abgeschlossen in der $\mathfrak{B}_\tau$ -Topologie, denn $A_\tau \ni f \mapsto |f(x)| \in \mathbb{R}$ ist für jeden Punkt $x \in E$ stetig. Also ist T eine Tonne. Wäre A_τ tonneliert, so wäre T Nullumgebung und wir hätten für ein geeignetes $U \in \mathfrak{B}_\tau$ die Ungleichung $\|f\|_D \leq \|f\|_U$ für alle $f \in A_\tau$. Es folgte $D \subset \hat{A}_\tau(U) \subset \hat{L}(U) = \overline{\text{Co}U} \in \mathfrak{B}_\tau$ (vgl. 3.3 und 3.5). Das ist offenbar für den Fall $\tau < 1$ nicht möglich (3.1), also ist A_τ für $\tau < 1$ nicht tonneliert. Da A_τ vollständig ist, kann A_τ auch nicht bornologisch sein. [28, S. 63]

Ganz analog läßt sich übrigens mit dem Beispiel von DINEEN zeigen, daß $(\mathcal{O}_E, c)$ im Falle $E = 1_\infty$ nicht tonneliert ist. Es würde folgen $D \subset \overline{\text{Co}K}$ für eine kompakte Menge $K \subset E$, das heißt, D wäre kompakt.

Warum wir auf "Tonneliertheit" großen Wert legen, wird durch den folgenden Satz klar.

6.5 Satz: Sei $\mathfrak{B}$ zulässige Überdeckung von X und $A = A_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{O}_X$ tonneliert in der $\mathfrak{B}$ -Topologie. Dann gilt für jede Fortsetzung (X, j, A) von A :

1° Für alle Punkte $x \in X$ ist $\hat{x}: A \ni f \mapsto \underline{f}(x) \in \mathbb{C}$ stetiger Algebromomorphismus.

2° $\underline{A}$ ist reguläre Klasse.

3° Es gibt eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}$ von X mit $\underline{A} = A_{\underline{\mathfrak{B}}}$ und $j^*: \underline{A} \ni g \mapsto g \circ j \in A$ ist topologisch bezüglich

der von $\mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) erzeugten Topologie.

Beweis: 1° : Die Menge $W = \{x \mid x \in \underline{X}, \hat{x} \text{ stetig}\}$ ist abgeschlossen in $\underline{X}$. Sei (x_n) Folge aus W mit $x_n \rightarrow x \in \underline{X}$. Die Menge $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $\underline{A}$ -beschränkt, also ist $\|\underline{f}\|_K: A \ni f \mapsto \|\underline{f}\|_K \in \mathbb{R}$ eine wohldefinierte Seminorm. Nach Voraussetzung ist jede der Mengen $T_n = \{f \mid f \in A, |\underline{f}(x_n)| \leq 1\}$ abgeschlossen in A , also ist $T = \bigcap_{0 \leq n} T_n = \{f \mid f \in A, \|\underline{f}\|_K \leq 1\}$ eine Tonne in A . Da A tonneliert ist, ist T eine Nullumgebung. Wegen der Stetigkeit jeder Funktion $\underline{f} \in \underline{A}$ gilt $T \subset \{f \mid f \in A, |\underline{f}(x)| \leq 1\}$, das heißt: $\hat{x}$ ist stetig.

W ist auch offen. Sei $x \in W$, dann gibt es $U \in \mathfrak{B}$ mit $|\hat{x}(f)| \leq \|f\|_U$ für alle $f \in A$. Zu U gibt es $s > 0$ und $V \in \mathfrak{B}$ mit $s < d_U$ und $U_s \subset V$. Nach dem Satz von CARTAN-THULLEN gilt $s \leq \rho_{\underline{A}}(x)$ und für $0 < r < \min\{s, d_{\underline{X}}(x)\}$:
 $\|f\|_{B(x,r)} \leq \|\underline{f}\|_{(jU)_s} = \|f\|_{U_s} \leq \|f\|_V$. (Es ist $(jU)_s = j(U_s)$)
 Also ist für alle $y \in B(x,r) \subset \underline{X}$ und für alle $f \in A$ die Ungleichung $|\hat{y}(f)| = |\underline{f}(y)| \leq \|f\|_V$ erfüllt, das heißt, es gilt $B(x,r) \subset W$.

Da $\underline{X}$ zusammenhängend ist, folgt $W = \underline{X}$ und damit 1°.

Zu 2° : $\underline{A}$ erfüllt sofort die Eigenschaften i), ii) in 5.4.2°, und iii), d.h. $\rho_{\underline{A}} > 0$, wurde oben mitbewiesen.

Zu 3° : Für $U \in \mathfrak{B}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei

$$V_n(U) = \{x \mid x \in \hat{A}(jU), d_{\underline{X}}(x) > \frac{1}{n}, m_{\underline{X}}(x, \partial(\hat{A}(jU))) > \frac{1}{n}\}.$$

Sei $\mathfrak{B}$ das System von endlichen Vereinigungen solcher Mengen $V_n(U)$, $U \in \mathfrak{B}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathfrak{B}$ eine zulässige Überdeckung von $\underline{X}$. Dazu genügt es offenbar, noch $\underline{X} = \bigcup \{V \mid V \in \mathfrak{B}\}$ zu zeigen: Zu $x \in \underline{X}$ gibt es wegen der Stetigkeit von $\hat{x}$ wie

oben eine Menge $V \in \mathfrak{B}$ mit $x \in \widehat{\hat{A}}^o(jV)$ und daher auch eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in \widehat{V}_n(V)$.

Ist $f \in A$ mit Fortsetzung $\underline{f} \in \underline{A}$, so gilt für $n > 0$ und $U \in \mathfrak{B}$:

$$(*) \quad \|\underline{f}\|_{V_n(U)} \leq \|\underline{f}\|_{jU} \leq \|f\|_U < \infty,$$

also $\underline{f} \in A_{\mathfrak{B}}$. Umgekehrt sei $g \in A_{\mathfrak{B}}$. Zu jedem $U \in \mathfrak{B}$ gibt es $0 < s < dU$ und $V \in \mathfrak{B}$ mit $U_s \subset V$, also ist $jU \subset V_n(V)$ für ein geeignetes n . Es folgt

$$(*) \quad \|g \circ j\|_U = \|g\|_{jU} \leq \|g\|_{V_n(V)} < \infty$$

und damit $g \circ j \in A$, das heißt $g \in \underline{A}$. Also haben wir $\underline{A} = A_{\mathfrak{B}}$ gezeigt. Wegen $(*)$ und $(*)$ ist j^* topologisch.

6.6 Corollar: Ist $\mathfrak{B}$ abzählbar, so ist auch $\mathfrak{B}$ abzählbar und $j^*: \underline{A} \rightarrow A$ ist Isomorphismus von Frécheträumen.

6.7 Corollar: Im Beweis zu Satz 6.5 wurde mitbewiesen: Ist $(X, j, \underline{A})$ Fortsetzung der regulären Klasse $A = A_{\mathfrak{B}} \subset {}^0X$ mit einer zulässigen Überdeckung $\mathfrak{B}$, so sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1° Für alle $x \in X$ ist $\hat{x}: A \ni f \mapsto \underline{f}(x) \in \mathbb{C}$ stetig in der $\mathfrak{B}$ -Topologie.

2° Es gibt eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}$ von X mit $\underline{A} = A_{\mathfrak{B}}$ und $j^*: \underline{A} \rightarrow A$ ist topologisch.

6.8 Corollar: Sei $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ analytisch und $(X, j, \underline{A})$ eine Fortsetzung von $A = A_{\mathbb{F}}$ (vgl. 5.9.4°). Dann existiert eine analytische Abbildung $\underline{f}: X \rightarrow \mathbb{F}$ mit $f = \underline{f} \circ j$.

Beweis: Wir können $(\underline{X}, j, \underline{A})$ als maximale Fortsetzung von A voraussetzen; dann gilt $\rho_{\underline{A}} \leq d_{\underline{X}}$. Sei $X_0 = jX \subset \underline{X}$ und $X_{\kappa+1} = \bigcup_{x \in X_{\kappa}} B(x, \rho_{\underline{A}}(x)) \subset \underline{X}$ für $\kappa \in \mathbb{N}$, so gilt nach (6.5)

$\underline{X} = \bigcup_{0 \leq \kappa} X_{\kappa}$. Durch Induktion definieren wir $\underline{f}|_{X_{\kappa}} = f_{\kappa}$ mit

$\rho_{f_{\kappa}} \geq \rho_{\underline{A}}|_{X_{\kappa}}$: Für $\kappa = 0$ ist $f_0: X_0 \ni jx \mapsto f(x) \in \mathbb{F}$ wohldefiniert, denn mit $jx = jy$ für $x, y \in X$ gilt auch

$f(x) = f(y)$, da f nicht mehr Punkte als A trennt. f_0

ist analytisch wegen $v \circ f_0 = \underline{v \circ f} \in \underline{A}|_{X_0}$ für alle $v \in \mathbb{F}'$.

$\rho_{f_0} \geq \rho_{\underline{A}}|_{X_0}$ gilt schließlich nach 5.10 und aufgrund von

$\rho_{f_0} \circ j = \rho_f \geq \rho_A = \rho_{\underline{A}} \circ j$. Sei bereits f_{κ} auf X_{κ} mit

$\rho_{f_{\kappa}} \geq \rho_{\underline{A}}$ definiert. Wir setzen für $y \in B(x, \rho_{\underline{A}}(x))$, $x \in X_{\kappa}$:

$f_{\kappa+1}(y) = \sum_{0 \leq n} P^n f_{\kappa}(x) \cdot (p_y - p_x)$. Wegen $\rho_{f_{\kappa}} \geq \rho_{\underline{A}} > 0$ (6.5) ist

$f_{\kappa+1}: X_{\kappa+1} \rightarrow \mathbb{F}$ wohldefiniert und analytisch. Es gilt wie in

5.10 $\rho_{f_{\kappa+1}}(y) = \inf\{\rho_{v \circ f_{\kappa+1}}(y) \mid v \in \mathbb{F}'\}$, also $\rho_{f_{\kappa+1}} \geq \rho_{\underline{A}}$,

denn es ist $v \circ f_{\kappa+1} = \underline{v \circ f}|_{X_{\kappa+1}}$ für alle $v \in \mathbb{F}'$. Mit

$\underline{f}: \underline{X} \ni x \mapsto f_{\kappa}(x) \in \mathbb{F}$ für $x \in X_{\kappa}$ ist dann eine analytische

Fortsetzung von f gefunden.

6.9 Folgerung: 6.1 gilt für alle Banachräume $\mathbb{E}$, denn durch eine Fortsetzung $(\underline{X}, j, \mathcal{O}_{\underline{X}})$ von $\mathcal{O}_X$ wird für jede reguläre Klasse $A \subset \mathcal{O}_X$ eine Fortsetzung $(\underline{X}, j, \underline{A})$ mit regulärem $\underline{A} = \{g \mid g \in \mathcal{O}_{\underline{X}}, g \circ j \in A\}$ gegeben.

Mit den regulären Klassen läßt sich jetzt auf $\mathcal{O}_X$ eine brauchbare Topologie einführen. Zum Schluß von 5.9.4⁰ haben wir festgestellt, daß jede Funktion aus $\mathcal{O}_X$ bereits in einer regulären Klasse $A_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{O}_X$ mit abzählbarer Überdeckung $\mathfrak{B} \in \omega$ liegt. Sei jetzt $(\mathcal{O}_X, b) = \lim_{\mathfrak{B} \in \omega} \text{ind } A_{\mathfrak{B}}$, dann ist $(\mathcal{O}_X, b)$ als induktiver Limes von Frécheträumen tonneliert und bornologisch [28, S. 60, 61]. Aus 6.5 folgt:

6.10 Satz: Ist (X, p) Gebiet über dem Banachraum $\mathbb{E}$ und $(\underline{X}, j, \mathcal{O}_{\underline{X}})$ Fortsetzung von $\mathcal{O}_X$, so ist die Abbildung $j^*: (\mathcal{O}_{\underline{X}}, b) \rightarrow (\mathcal{O}_X, b)$ topologisch.

Beweis: j^* ist stetig, denn zu $\underline{\mathfrak{B}} \in \omega(\underline{X})$ findet man leicht $\mathfrak{B} \in \omega(X)$, so daß zu jedem $U \in \mathfrak{B}$ ein $V \in \underline{\mathfrak{B}}$ existiert mit $jU \subset V$. Also ist $A_{\underline{\mathfrak{B}}} \rightarrow A_{\mathfrak{B}} \rightarrow (\mathcal{O}_X, b)$ stetig und damit $j^* \cdot (j^*)^{-1}$ ist stetig, da man umgekehrt für alle $\mathfrak{B} \in \omega(X)$ nach Satz 6.5 eine Überdeckung $\underline{\mathfrak{B}} \in \omega(\underline{X})$ so bestimmen kann, daß $A_{\underline{\mathfrak{B}}} \rightarrow A_{\mathfrak{B}}$ topologisch und daher $A_{\mathfrak{B}} \rightarrow (\mathcal{O}_{\underline{X}}, b)$ stetig ist.

6.11 Folgerung: Für jeden Punkt $x \in \underline{X}$ ist $\hat{x}: \mathcal{O}_X \ni f \mapsto \underline{f}(x) \in \mathbb{C}$ ein b -stetiger Algebromorphismus mit der Eigenschaft: $\hat{x}|_{\mathbb{E}'}: \mathbb{E}' \ni \mu \mapsto x(\underline{\mu} \circ p) \in \mathbb{C}$ ist Element des Bidualraumes und wird erzeugt vom $\underline{p}x \in \mathbb{E}$.

j^* ist topologisch und die Auswertung $\mathcal{O}_{\underline{X}} \ni \underline{f} \mapsto \underline{f}(x) \in \mathbb{C}$ ist stetig in der Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{O}_{\underline{X}}$, also erst recht b -stetig. Daher ist auch $\hat{x}: \mathcal{O}_X \xrightarrow{(j^*)^{-1}} \mathcal{O}_{\underline{X}} \rightarrow \mathbb{C}$

b-stetig. Die zweite Behauptung folgt aus der Beziehung $x(\underline{\mu} \circ p) = \underline{\mu} \circ p(x) = \underline{\mu} \circ p(x)$ für alle $\mu \in E'$.

Diese Folgerung wird im achten Paragraphen zum Ausgangspunkt genommen, um die Holomorphiehülle eines Gebietes als (geeignet topologisierte) Teilmenge des Spektrums von $\mathcal{O}_X$ zu erhalten.

Der Zusammenhang mit den bereits zitierten Ergebnissen von HIRSCHOWITZ [22] wird durch die folgende Aussage hergestellt:

6.12 Lemma: $(\mathcal{O}_X, b)$ ist der zu $(\mathcal{O}_X, c)$ assoziierte bornologische Raum.

Beweis: Da $(\mathcal{O}_X, b)$ bornologisch ist, genügt es zu zeigen, daß jede c-beschränkte Menge auch b-beschränkt ist. Sei $B \subset \mathcal{O}_X$ c-beschränkt. Dann ist für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $B(x) = \{f(x) \mid f \in B\} \subset \mathbb{C}$ beschränkt, da $\{x\}$ kompakt ist. Es gibt sogar eine Zahl $0 < s < d(x)$, mit $\sup\{\|f\|_{B(x,s)} \mid f \in B\} < \infty$ (das bedeutet: B ist gleichgradig stetig). Denn sonst gäbe es eine Folge (x_n) aus X mit $x_n \rightarrow x$ und $\sup\{|f(x_n)| \mid f \in B\} \geq n$, das heißt, B wäre auf der kompakten Menge $\{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt. Widerspruch! Mit $V_n = \{x \mid x \in X, d(x) > \frac{1}{n}, \sup_B |f(x)| < n\}$ und $U_n = \{x \mid x \in V_n, m(x, \partial V_n) > \frac{1}{n}\}$ ist dann (vgl. 5.9.4°) $\mathfrak{B} = (U_n \mid n > 0)$ zulässig. Schließlich gilt $B \subset A_{\mathfrak{B}}$ und B ist beschränkt in der $\mathfrak{B}$ -Topologie, also auch b-beschränkt,

denn die Injektion $A_{\mathfrak{B}} \rightarrow (\mathcal{O}_X, b)$ ist stetig.

Aus 6.12 ergibt sich, daß der Raum $(\mathcal{O}_X, b)$ auch als induktiver Limes von $\{A_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \text{ zulässig und } A_{\mathfrak{B}} \text{ bornologisch}\}$ oder $\{A_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \text{ beliebige abzählbare Überdeckung von } X\}$ definiert werden kann. Der Limes wäre bornologisch, gröber als b und feiner als c , also gleich b .

Auf $\mathcal{O}_X$ sind noch andere lokalkonvexe Topologien außer c und b gebräuchlich (vgl. ALEXANDER [1], COEURÉ [11], DINEEN [13], NACHBIN [26]). Allen diesen Topologien ist aber gemeinsam, daß sie die gleichen beschränkten Mengen haben. Wenngleich also bisher nicht schlüssig festzustellen ist, welche die natürliche Topologie auf $\mathcal{O}_X$ im unendlichdimensionalen Fall ist, so scheint die natürliche Bornologie auf $\mathcal{O}_X$ gefunden zu sein. Diese Bornologie wird von HIRSCHOWITZ in [20] eingehend untersucht.

§ 7. Holomorphiekonvexität

Der am Ende des fünften Paragraphen eingeführte Begriff der A-Konvexität für reguläre Klassen A soll im folgenden weiter untersucht werden. Als Hauptresultat wird für separable Banachräume $\mathbb{E}$ eine Charakterisierung der Holomorphiegebiete über $\mathbb{E}$ angegeben.

Zunächst wird eine Abschwächung des Konvexitätsbegriffes nach 4.1.2^o vorgestellt, die in wichtigen Fällen äquivalent zur A-Konvexität ist. Dazu die

7.1 Definition: Sei (X, p) Gebiet über dem Banachraum $\mathbb{E}$ und m die zugehörige Metrik (2.2.1^o) .

1^o Eine Cauchyfolge aus X (bezüglich m) heißt Randfolge, wenn sie nicht konvergiert.

2^o Eine Familie A von analytischen Abbildungen auf X heißt über die Randfolge (x_n) hinaus simultan fortsetzbar, wenn es eine simultane analytische Fortsetzung $(\underline{X}, j, \underline{A})$ von A so gibt, daß die Folge (jx_n) in $\underline{X}$ konvergiert.

Folgerungen: Eine Randfolge ist ein "Randpunkt" im Sinne von BEHNKE-THULLEN [3, S. 13].

Eine Randfolge (x_n) erfüllt offenbar $d(x_n) \rightarrow 0$.

7.2 Satz: Sei $\mathfrak{B}$ eine zulässige Überdeckung des Gebietes X und sei $A = A_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{O}_X$. Dann sind die folgenden Aussagen

äquivalent:

1° Zu jeder Randfolge (x_n) aus X gibt es eine holomorphe Funktion $f \in A$ mit $\sup_n |f(x_n)| = \infty$.

2° Zu jeder Randfolge (x_n) aus X gibt es eine holomorphe Funktion $f \in A$, die nicht über (x_n) hinaus fortsetzbar ist.

3° Zu jeder Randfolge (x_n) aus X gibt es eine holomorphe Funktion $f \in A$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_f(x_n) = 0$.

Beweis: Aus 1° folgt 2° unmittelbar.

Aus 2° folgt 3°: Sei (x_n) Randfolge und $f \in A$ nicht über (x_n) hinaus fortsetzbar. Wäre $\rho_f(x_n) \not\rightarrow 0$, so gäbe es eine Teilfolge (x_{n_v}) von (x_n) mit $\rho_f(x_{n_v}) \geq r > 0$ für ein geeignetes $r \in \mathbb{R}_+$. Sei $(\underline{X}, j, \underline{f})$ analog zu 5.3 die Fortsetzung von f auf $\bigcup_{v=0}^{\infty} B(x_{n_v}, r)$. Dann gilt $d_{\underline{X}}(x_{n_v}) \geq r > 0$ für alle $v \in \mathbb{N}$, also konvergiert die Cauchyfolge (jx_{n_v}) und damit auch (jx_n) . Widerspruch! Es muß daher $\rho_f(x_n) \rightarrow 0$ gelten.

Aus 3° folgt 1° (analog zu DINEEN [12, th.III]): Sei (x_n) Randfolge und $g \in A$ mit $\rho_g(x_n) \rightarrow 0$ nach Voraussetzung. Wir nehmen an, 1° sei verletzt. Dann wird durch $q: A \ni f \mapsto \sup\{|f(x_n)| \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ eine Seminorm definiert und die Menge $T = \{f \mid f \in A, q(f) \leq 1\}$ ist abgeschlossen in der $\mathfrak{B}$ -Topologie, also eine Tonne. Sei A_0 der assoziierte bornologische Raum zu A (bezüglich der $\mathfrak{B}$ -Topologie). Da A vollständig ist (6.3), läßt sich A_0 als induktiver Limes von Banachräumen definieren [28, S. 63], daher ist A_0 auch tonneliert. Folglich ist $q: A_0 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Sei jetzt $V_n = \{x \mid x \in X, |g(x)| < n, d(x) > \frac{1}{n}\}$ und $U_n = \{x \mid x \in V_n, m(x, \partial V_n) > \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Es gilt $X = \bigcup_{0 < n} U_n$. Wir wollen zeigen:

(*) Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $q(f) \leq \|f\|_{U_N}$ für alle $f \in A$.

Ist (*) nicht richtig, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine holomorphe Funktion $f_n \in A$ mit $q(f_n) > n$ und $\|f\|_{U_n} < \frac{1}{n}$. Die Folge $(f_n \mid n > 0)$ ist beschränkt in der $\mathfrak{B}$ -Topologie: Zu $U \in \mathfrak{B}$ gibt es $0 < s < dU$ und $V \in \mathfrak{B}$ mit $U_s \subset V$, also ist g auf U_s beschränkt und es gilt $\|g\|_{U_s} < M$ für eine geeignete positive Zahl M . Mit $L > 2\max\{\frac{1}{s}, M\}$, $L \in \mathbb{N}$, folgt dann $U \subset U_L$ und daher

$$\sup\{\|f_n\|_U \mid n > 0\} \leq \sup\{\|f_1\|_U, \|f_2\|_U, \dots, \|f_L\|_U, \frac{1}{L}\} < \infty.$$

Das bedeutet: $(f_n \mid n > 0)$ ist beschränkt in der $\mathfrak{B}$ -Topologie und damit auch in der assoziierten bornologischen Topologie.

Wegen $q(f_n) \rightarrow \infty$ steht das im Widerspruch zur Stetigkeit von q .

Aus (*) folgt jetzt $x_n \in \hat{A}(U_N)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach 5.5 bzw. 5.7 ergibt sich $\rho_g(x_n) \geq \frac{1}{N}$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\rho_g(x_n) \rightarrow 0$.

7.3 Anmerkungen: 1^o Statt für Randfolgen gilt die Äquivalenz der Aussagen 7.2.1^o - 3^o auch für Folgen (x_n) mit $d(x_n) \rightarrow 0$; 7.1.2^o muß dann entsprechend anders definiert werden.

2^o 7.2 gilt auch für $\mathcal{O}_X$ anstelle von A [12]; der Beweis ist der gleiche, wenn von der Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{O}_X$ ausgegangen wird.

3° Ein Gebiet, das die drei in 7.2 aufgeführten Eigenschaften besitzt, ist maximale simultane Fortsetzung von A , wenn A die Punkte von X trennt. Insbesondere stimmt dann X mit seiner Holomorphiehülle überein.

In enger Beziehung zur letzten Anmerkung steht:

7.4 Lemma: Sei $A = A_{\mathfrak{B}}$ wie in 7.2 reguläre Klasse und sei X A -separabel (das heißt: A trennt die Punkte von X). Dann ist äquivalent:

- 1° X ist maximale Fortsetzung von A .
- 2° Für jede Randfolge (x_n) aus X gilt: A ist nicht simultan über (x_n) hinaus fortsetzbar.

Beweis: unmittelbar.

Ein Gebiet, das die Eigenschaft 7.4.2° erfüllt, ist A -konvex, es folgt nämlich $\rho_A \leq d$, so daß sich 5.14 anwenden läßt. Will man die Umkehrung zeigen, so stößt man auf folgende Schwierigkeit: Bei einer Fortsetzung $(X, j, \underline{A})$ der regulären Klasse A auf X weiß man nicht, ob $\underline{A}$ eine reguläre Klasse auf $\underline{X}$ ist. Möglicherweise gibt es einen Punkt $x \in \underline{X}$ mit $\rho_{\underline{A}}(x) = 0$, obwohl $\rho_A > 0$ ist. An dieser Stelle hilft der Satz 6.5 weiter:

7.5 Satz: Sei $A = A_{\mathfrak{B}}$ tonnelliert in der $\mathfrak{B}$ -Topologie. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° Für jede Randfolge (x_n) aus X gilt: A ist nicht über (x_n) hinaus simultan fortsetzbar.

$$2^\circ \rho_A \leq d$$

$$3^\circ \lim_{d(x) \rightarrow 0} \sup \rho_A(x) = 0$$

4° X ist A -konvex.

Beweis: Es bleibt $4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ zu zeigen. Sei A über die Randfolge (x_n) aus X hinaus fortsetzbar mit Fortsetzung $(\underline{X}, j, \underline{A})$. Zu $\mathfrak{B}$ gibt es nach Satz 6.5 eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}$ von $\underline{X}$, so daß $\underline{A} = A_{\mathfrak{B}}$ gilt und $j^*: \underline{A} \rightarrow A$ topologisch ist. Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} jx_n \in \overset{\circ}{\underline{U}}$ mit $\underline{U} \in \mathfrak{B}$. Es gibt wegen der Stetigkeit von $(j^*)^{-1}$ ein $U \in \mathfrak{B}$ mit $\|\underline{f}\|_{\underline{U}} \leq \|f\|_U$ für alle $f \in A$, wobei $\underline{f}$ wieder die Fortsetzung von f bezeichne, also $\underline{f} = (j^*)^{-1}(f)$. Wegen $|f(x_n)| = |\underline{f}(jx_n)| \leq \|\underline{f}\|_{\underline{U}} \leq \|f\|_U$ gilt $x_n \in \hat{A}(U)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $d(\hat{A}(U)) = 0$ im Widerspruch zur A -Konvexität.

Ist die reguläre Klasse $A = A_{\mathfrak{B}}$ durch eine abzählbare zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}$ von X definiert, so sind die in 7.2, 7.4 und 7.5 formulierten Eigenschaften äquivalent, denn es gilt:

7.6 Lemma: Sei $\mathfrak{B}$ abzählbare und zulässige Überdeckung des Gebietes (X, p) und sei $A = A_{\mathfrak{B}}$. Gilt dann $d(\hat{A}(U)) > 0$ für alle $U \in \mathfrak{B}$, so gibt es zu jeder Folge (x_n) aus X mit $d(x_n) \rightarrow 0$ eine holomorphe Funktion $f \in A$ mit $\sup_{\mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.

Beweis: Sei $\mathfrak{B} = (U_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit $U_n \subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann für $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \hat{A}(U_{n+1}) \setminus \hat{A}(U_n)$ angenommen werden. Wie im Beweis zu Satz 4.2 findet man eine Folge (f_n) von holomorphen Funktionen aus A mit $\|f_n\|_{\hat{A}(U_n)} < 2^{-n}$ und $|f_n(x_n)| \geq n+1 + \sum_{v=1}^{n-1} |f_v(x_n)|$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f = \sum_{0 \leq n} f_n \in A$ (1.7) erfüllt daher $\sup_{\mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.

Mit der folgenden Beweismethode erhält man etwas allgemeinere Ergebnisse, die vor allem für den separablen Fall gut passen:

7.7 Lemma: Sei $A = A_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{O}_X$ mit abzählbarer und zulässiger Überdeckung $\mathfrak{B}$ von X . Dann ist für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $S(x) = \{f \mid f \in A, \rho_f(x) > d(x)\}$ mager in A oder es gilt $A = S(x)$.

Beweis: Für $\kappa \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $S^\kappa(x) = \{f \mid f \in A, \rho_f(x) \geq d(x) + \frac{1}{\kappa}\}$ und $(\underline{X}, j, S^\kappa(x))$ die Fortsetzung von $S^\kappa(x)$ nach $B(x, d(x) + \frac{1}{\kappa})$ (vgl. 5.3). Sei $\mathfrak{B}$ die zulässige Überdeckung von $\underline{X}$, die aus endlichen Vereinigungen von Mengen jU , $U \in \mathfrak{B}$, und Kugeln $B(jx, (1 - \frac{1}{m})d(x) + \frac{1}{\kappa}) \subset \underline{X}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entsteht. $A_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{O}_{\underline{X}}$ ist wie $A = A_{\mathfrak{B}}$ Fréchetraum und die Abbildung $j^*: A_{\mathfrak{B}} \ni g \mapsto g \circ j \in A$ ist wohldefiniert und stetig mit $j^*(A_{\mathfrak{B}}) = S^\kappa(x)$. Sei jetzt $S(x) \neq A$; dann gilt auch $S^\kappa(x) \neq A$ und $S^\kappa(x)$ ist mager in A nach dem Satz von Banach (BOURBAKI [6, S. 23]). Also ist auch $S(x) = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} S^\kappa(x)$ mager in A .

7.8 Folgerung: Ist $\underline{x} = (x_n)$ eine Randfolge aus X , so ist unter den Voraussetzungen von 7.7 die Menge $S(\underline{x}) = \{f \mid f \in A, \text{ es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \rho_f(x_n) > d(x_n)\}$ mager in A oder es gilt $S(\underline{x}) = A$.

Zusammenfassend folgt der Satz:

7.9 Satz: Sei $\mathfrak{B}$ abzählbare und zulässige Überdeckung des Gebietes (X, p) über dem Banachraum E . Mit $A = A_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{O}_X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° Zu jeder Folge (x_n) aus X gibt es eine holomorphe Funktion $f \in A$ mit $\rho_f(x_n) \leq d(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Menge dieser f ist fett in A (von zweiter Kategorie).

2° Zu jeder Folge (x_n) aus X mit $d(x_n) \rightarrow 0$ gibt es eine holomorphe Funktion $f \in A$ mit $\sup_{\mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.

3° Zu jeder Randfolge (x_n) aus X gibt es eine holomorphe Funktion $f \in A$, die sich nicht über (x_n) hinaus fortsetzen läßt. (vgl. 7.2.1° - 3°)

4° X ist A -konvex (und erfüllt damit 7.5.1° - 4°).

5° Für alle $U \in \mathfrak{B}$ gilt $d(\hat{A}(U)) > 0$.

Beweis: Es ist nur noch $4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ zu zeigen. Da X A -konvex ist, gilt $\rho_A \leq d$ nach 7.5. Sei (x_n) eine beliebige Folge aus X . Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\kappa \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist wie in Lemma 7.7 die Menge $S^\kappa(x_n)$ mager in A wegen $\rho_A \leq d$, also ist auch die Vereinigung $\bigcup_{0 \leq n, \kappa} S^\kappa(x_n)$ mager. Das bedeutet aber gerade, daß die Menge der $f \in A$ mit $\rho_f(x_n) \leq d(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ fett in A ist.

Ergebnisse von DINEEN [12, th.I] lassen sich aus diesem Satz ablesen:

7.10 Folgerung: Für $A = A_\infty$ erhält man die folgenden äquivalenten Aussagen:

- 1° Zu jeder Folge (x_n) aus X mit $d(x_n) \rightarrow 0$ gibt es eine Funktion $f \in A$ mit $\sup_{\mathbb{N}} |f(x_n)| = \infty$.
- 2° X ist A -konvex.
- 3° Für alle $V \in \mathfrak{B}_\infty$ gilt $d(\hat{A}(V)) = dV$.
- 4° $\rho_A = d$.

Im separablen Fall folgt noch:

7.11 Corollar: Sei E separabel und $\mathfrak{B}$ abzählbare und zulässige Überdeckung des Gebietes (X, p) über E . Für $A = A_{\mathfrak{B}}$ ist äquivalent:

- 1° Die Menge der Funktionen $f \in A$ mit $\rho_f \leq d$ ist **fett** in A .
- 2° X ist A -konvex.

Das letzte Corollar gewinnt Bedeutung, wenn man noch berücksichtigt, daß im separablen Fall jede reguläre Klasse A in einer geeigneten regulären Klasse $A_{\mathfrak{B}}$ mit abzählbarer und zulässiger Überdeckung $\mathfrak{B}$ von X liegt. Denn $\rho = \rho_A$ definiert wie in 5.9.3° eine reguläre Klasse $A_\rho = A_{\mathfrak{B}_\rho}$. A_ρ wird bereits durch eine abzählbare Unterfamilie $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}_\rho$ definiert (COEURÉ [11]). Genauer: Es gibt eine zulässige

Überdeckung $\mathfrak{B} = (U_n \mid n \in \mathbb{N})$ von Mengen $U_n \in \mathfrak{B}_\rho$ mit $U_n \subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit der Eigenschaft:

(*) Zu jedem $U \in \mathfrak{B}_\rho$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $U \subset U_N$.

Mit $\mathbb{E}$ ist auch X separabel (2.2.1^o). Sei (z_j) eine in X dichte Folge. Man setze

$U_n = \bigcup_{1, j \leq n} B(z_j, (1-2^{-1})\min\{\rho(z_j), d(z_j)\})$ für $n \in \mathbb{N}$, dann

ist $\mathfrak{B} = (U_n \mid n \in \mathbb{N})$ zulässige Überdeckung mit $U_n \in \mathfrak{B}_\rho$

und $U_n \subset U_{n+1}$. Es gilt auch (*); denn sei $U \in \mathfrak{B}_\rho$, also

$U \subset \bigcup_{\mu \leq m} B(x_\mu, r_\mu)$ mit $2s = \min_{\mu \leq m} \{\rho(x_\mu) - r_\mu, d(x_\mu) - r_\mu\} > 0$.

Dann gibt es Glieder $z_{j_\mu} \in B(x_\mu, s)$ aus der Folge (z_j) mit $\min\{\rho(z_{j_\mu}), d(z_{j_\mu})\} > r_\mu + s$ für $\mu = 1, 2, \dots, m$; folglich

ist $U \subset \bigcup_{\mu \leq m} B(z_{j_\mu}, r_\mu + s) \subset U_N$ für genügend großes N .

7.11 gilt nicht für alle Banachräume. HIRSCHOWITZ gibt in [21] das Beispiel eines Banachraumes $\mathbb{E}$, dessen Einheitskugel $X = B(0, 1)$ die folgenden Eigenschaften hat: i) Zu jeder analytischen Funktion $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es Punkte $x \in X$ mit $\rho_g(x) > d(x)$. ii) Es gibt eine analytische Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\rho_f \leq d$. Obwohl X konvex und damit A -konvex für alle regulären Klassen $A \subset \mathcal{O}_X$ ist, kann X also nicht Existenzgebiet einer holomorphen Funktion sein. X ist aber Existenzgebiet einer analytischen Abbildung.

Der Begriff des Holomorphiegebietes muß demzufolge die analytischen Abbildungen berücksichtigen und darf sich nicht auf die analytischen Funktionen beschränken, wie das bei der Definition der Holomorphiehülle aufgrund von 6.1 möglich ist.

7.12 Definition: Ein Gebiet (X, p) über E heißt Holomorphiegebiet der analytischen Abbildung $f: X \rightarrow F$, wenn bei jeder Fortsetzung $(\underline{X}, j, \underline{f})$ von f die Abbildung $j: X \rightarrow \underline{X}$ ein Isomorphismus ist.

7.13 Folgerung: Ist (X, p) Holomorphiegebiet, so gibt es eine reguläre Klasse $A \subset \mathcal{O}_X$ mit

1° X ist A -konvex.

2° X ist A -separabel.

Beweis: Sei X Holomorphiegebiet der analytischen Abbildung $f: X \rightarrow F$. Es gilt dann $\rho_f \leq d$, sonst ließe sich nach 5.3 eine echte Fortsetzung von f finden. $A = A_f \cup A_\infty \subset \mathcal{O}_X$ ist reguläre Klasse und es gilt nach 5.10: $\rho_A = \rho_f \leq d$. Also ist X A -konvex. Die maximale simultane Fortsetzung $(\underline{X}, j, \underline{A})$ von A ist nach 2.9 $\underline{A}$ -separabel. Nach 6.8 läßt sich f auf $\underline{X}$ fortsetzen, deshalb ist j ein Isomorphismus. Folglich ist X A -separabel.

Die Umkehrung von 7.13 läßt sich für den separablen Fall zeigen.

7.14 Satz: Ein Gebiet (X, p) über dem separablen Banachraum E ist genau dann Holomorphiegebiet, wenn es eine reguläre Klasse $A \subset \mathcal{O}_X$ gibt, so daß X A -konvex und A -separabel ist.

Beweis: Sei X A -konvex und A -separabel für eine reguläre Klasse $A \subset \mathcal{O}_X$ mit $\rho = \rho_A$. Wir können annehmen, daß $A = A_\rho$ gilt, denn wegen $A \subset A_\rho$ ist X A_ρ -konvex und A_ρ -separabel. A ist dann Fréchetraum, wie im Anschluß an 7.11 erläutert wurde. Für zwei Punkte $x, x' \in X$ ist die Menge der $f \in A$ mit $f(x) = f(x')$ abgeschlossen. Das Komplement $T(x, x') = \{f \mid f \in A, f(x) \neq f(x')\}$ ist dicht, also fett: Sei $g \in A \setminus T(x, x')$ und $f \in T(x, x')$ ($T(x, x') \neq \emptyset$, da X A -separabel). Es gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $g + \frac{1}{n}f \in T(x, x')$, also $g \in \overline{T(x, x')}$ wegen $g + \frac{1}{n}f \rightarrow g$. Für eine abzählbare und dichte Menge $Q \subset E$ ist auch $p^{-1}(Q) \subset E$ abzählbar und dicht ([30, S. 81]; der dort angegebene Beweis macht nur von der Separabilität des Basisraumes Gebrauch). Folglich ist die Menge $D = \{(x, x') \mid x, x' \in X, x \neq x', px = px' \in Q\}$ ebenfalls abzählbar, also $T(D) = \{f \mid f \in A, \text{ für alle } (x, x') \in D \text{ gilt } f(x) \neq f(x')\}$ fett in A . Nach 7.11 ist dann auch $H = \{f \mid f \in T(D), \rho_f \leq d\}$ fett in A .

Wir zeigen: X ist Holomorphiegebiet von jeder Funktion $f \in H$. Sei $(\underline{X}, j, \underline{f})$ Fortsetzung von $f \in H$. Dann ist j surjektiv wegen $\rho_f \leq d$ und der Stetigkeit von ρ_f . j ist auch injektiv. Ist nämlich $x, y \in X$ mit $jx = jy$, so gilt $px = py$ und die Funktionswerte von f stimmen in den entsprechenden Punkten der beiden Kugeln mit Mittelpunkten x, y und dem gleichen Radius überein. Wegen $f \in T(D)$ folgt daraus $x = y$. Also ist j bijektiv und damit Isomorphismus.

7.15 Corollar: Ein separables Holomorphiegebiet ist Holomorphiegebiet einer holomorphen Funktion.

§ 8. Das Spektrum

Für eine $\mathbb{C}$ -Algebra A mit Einselement ist das Spektrum $\mathcal{P}(A)$ die Menge der nichttrivialen Algebromorphismen $A \rightarrow \mathbb{C}$. Ist (X, p) Gebiet über dem $\mathbb{C}^n$, dann gilt $H(X) = \mathcal{P}(\mathcal{O}_X)$ für die Holomorphiehülle $H(X)$ von X , wenn $\mathcal{P}(\mathcal{O}_X)$ mit einer geeigneten analytischen Struktur versehen wird [18]. Für unendlichdimensionale Gebiete (X, p) können wir zeigen, daß die Holomorphiehülle sich ähnlich mit Hilfe des Spektrums konstruieren läßt, wobei aber offenbleibt, ob $H(X) = \mathcal{P}(\mathcal{O}_X)$ oder $H(X) \subsetneq \mathcal{P}(\mathcal{O}_X)$ gilt. Die Konstruktion stützt sich auf Versuche von ALEXANDER [1] und COEURE [11]: ALEXANDER versteht eine Teilmenge $\mathcal{E}_A(X)$ von $\mathbb{C}$ -stetigen Elementen von $\mathcal{P}(\mathcal{O}_X)$ mit der Struktur eines Gebietes und zeigt, daß sich alle analytischen Abbildungen von X nach $\mathcal{E}_A(X)$ fortsetzen lassen. $\mathcal{E}_A(X)$ ist Holomorphiehülle, falls jede Fortsetzung von X normal ist (offenes Problem, vgl. 6.2). COEURE hat daher für separable Gebiete X eine Teilmenge $\mathcal{E}_C(X)$ der $\mathbb{C}$ -stetigen Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{O}_X)$ mit der Struktur eines Gebietes versehen und gezeigt, daß $\mathcal{E}_C(X)$ Fortsetzung von $\mathcal{O}_X$ ist und $\mathcal{E}_A(X)$ enthält, ohne beweisen zu können, daß $\mathcal{E}_C(X)$ Holomorphiehülle ist.

Der Weg, der hier eingeschlagen wird, ist von den vorigen Paragraphen her geläufig. Zunächst untersuchen wir die Situation für eine reguläre Klasse. Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare und

zulässige Überdeckung des Gebietes (X, p) über E , die nur aus beschränkten Mengen besteht. Wir zeigen, daß sich eine Teilmenge $\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$ des Spektrums $\mathcal{F}(A_{\mathfrak{B}})$ zu einem Gebiet über E machen läßt und maximale simultane Fortsetzung von $A_{\mathfrak{B}}$ ist. Mit diesem Ergebnis erhalten wir $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$ als Holomorphiehülle mit Hilfe von 2.7 als Durchschnitt der $\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$.

8.1 Konstruktion von $\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$: Sei $\mathfrak{B}$ eine zulässige Überdeckung des Gebietes (X, p) über dem Banachraum E mit der Eigenschaft: Jede Menge $U \in \mathfrak{B}$ ist beschränkt in der Metrik m (2.2.1^o). Von 6.11, bzw. 6.5, ist bekannt, daß es sinnvoll ist, sich auf die stetigen Algebromorphismen zu beschränken. (Ob bereits jeder Algebromorphismus $h: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbb{C}$ b-stetig ist oder sogar c-stetig wie im endlich-dimensionalen Fall, ist ein offenes Problem.)

1^o Erste Einschränkung: Wir setzen daher:

$\mathcal{F}_1(A_{\mathfrak{B}}) = \{h \mid h \in \mathcal{F}(A_{\mathfrak{B}}), h \text{ ist stetig in der } \mathfrak{B}\text{-Topologie}\}$.
Jedes $h \in \mathcal{F}_1(A_{\mathfrak{B}})$ induziert eine Linearform
wh: $E' \ni \mu \mapsto h(\mu \circ p) \in \mathbb{C}$, wh ist stetig, denn es gibt $U \in \mathfrak{B}$, $\bar{U} \neq \emptyset$, $p(U)$ beschränkt, mit $|h(\mu \circ p)| \leq \|\mu \circ p\|_U \leq \|\mu\|_{p(U)}$ für alle $\mu \in E'$. Also ist w eine Abbildung $w: \mathcal{F}_1(A_{\mathfrak{B}}) \rightarrow E''$.
Sei $\mathcal{J}: E \rightarrow E''$ die natürliche Einbettung mit
 $\mathcal{J}a: E' \ni \mu \mapsto \mu(a) \in \mathbb{C}$ für alle $a \in E$. 6.11 gibt Anlaß, nur Elemente $h \in \mathcal{F}_1(A_{\mathfrak{B}})$ mit wh $\in \mathcal{J}E$ zu berücksichtigen:

2^o Zweite Einschränkung: Wir setzen $\mathcal{F}_2(A_{\mathfrak{B}}) = w^{-1}(\mathcal{J}E)$.

$\mathcal{F}_2(A_{\mathfrak{M}})$ ist nicht leer, denn für jeden Punkt $x \in X$ ist die Auswertung $\hat{x}: A_{\mathfrak{M}} \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ stetig bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz und es gilt $w\hat{x} = \mathcal{T}(px)$, also $\{\hat{x} \mid x \in X\} \subset \mathcal{F}_2(A_{\mathfrak{M}})$. Sei $q = \mathcal{T}^{-1} \circ w: \mathcal{F}_2(A_{\mathfrak{M}}) \rightarrow \mathbb{E}$ die "Projektion" und $j: X \ni x \mapsto \hat{x} \in \mathcal{F}_2(A_{\mathfrak{M}})$. Es gilt dann $p = q \circ j$.

3° Topologie auf $\mathcal{F}_2(A_{\mathfrak{M}})$: Sei $h \in \mathcal{F}_2(A_{\mathfrak{M}})$. Es gibt $U \in \mathfrak{B}$ und $C > 0$ mit $|h(f)| \leq C \|f\|_U$ für alle $f \in A_{\mathfrak{M}}$. Da diese Ungleichung auch für alle Potenzen von f richtig ist, gilt $|h(f)| \leq \|f\|_U$ für alle $f \in A_{\mathfrak{M}}$. Zu U gibt es $r > 0$ und $V \in \mathfrak{B}$ mit $r < dU$ und $U_r \subset V$. Für $a \in \mathbb{E}$, $\|a\| < r$, sei formal definiert:

$$h_a(f) = \sum_{0 \leq n} h(P_a^n f) \quad \text{für } f \in A_{\mathfrak{M}}.$$

Zunächst ist jeder Term $h(P_a^n f)$ der Reihe wohldefiniert, da $A_{\mathfrak{M}}$ eine reguläre Klasse ist. Die Reihe konvergiert absolut, denn nach 5.6 gilt

$$|h(P_a^n f)| \leq \|P_a^n f\|_U \leq \left(\frac{\|a\|}{r}\right)^n \|f\|_{U_r} \leq \left(\frac{\|a\|}{r}\right)^n \|f\|_V.$$

Also ist $h_a: A_{\mathfrak{M}} \rightarrow \mathbb{C}$ eine wohldefinierte lineare Abbildung, die wegen $|h_a(f)| \leq \frac{r}{r - \|a\|} \|f\|_V$ auch stetig in der $\mathfrak{B}$ -Topologie ist. Schließlich gehört h_a zum Spektrum von $A_{\mathfrak{M}}$, denn für $f, g \in A_{\mathfrak{M}}$ gilt $P_a^n(fg) = \sum_{i+j=n} P_a^i f \cdot P_a^j g$ und

$$\sum_{0 \leq i, j} |h(P_a^i f)| |h(P_a^j g)| \leq \|fg\|_V \sum_{0 \leq i, j} \left(\frac{\|a\|}{r}\right)^{i+j} < \infty, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} h_a(fg) &= \sum_{0 \leq n} h(P_a^n fg) = \sum_{0 \leq n} \sum_{i+j=n} h(P_a^i f) h(P_a^j g) = \\ &= \left(\sum_{0 \leq i} h(P_a^i f) \right) \left(\sum_{0 \leq j} h(P_a^j g) \right) = h_a(f) h_a(g). \end{aligned} \quad \text{Es folgt}$$

$h_a \in \mathcal{Y}_1(A_{\mathfrak{A}})$. Wir zeigen noch $h_a \in \mathcal{Y}_2(A_{\mathfrak{A}})$. Für $\mu \in \mathbb{E}'$ gilt $P_a^0(\mu \circ p) = \mu \circ p$, $P_a^1(\mu \circ p) = \mu(a)$ und $P_a^n(\mu \circ p) = 0$ für $n > 0$. Daher ist $wh_a(\mu) = h_a(\mu \circ p) = h(\mu \circ p) + h(\mu(a)) = \mu(q(h)) + \mu(a)$, wh_a wird also von $q(h) + a \in \mathbb{E}$ erzeugt. Folglich ist

$$1) \quad q(h_a) = q(h) + a.$$

Weiter läßt sich für $a, b \in \mathbb{E}$ mit $\|a\|, \|b\|, \|a+b\| < r$ zeigen:

$$ii) \quad (h_a)_b = h_{a+b}.$$

Denn es ist $P_{a+b}^n f = \sum_{i+j=n} P_a^i P_b^j f$ und daher

$$(h_a)_b(f) = \sum_{0 \leq j} h_a(P_b^j f) = \sum_{0 \leq j} \sum_{0 \leq i} h(P_a^i P_b^j f) = \sum_{0 \leq n} h(P_{a+b}^n f) = h_{a+b}(f)$$

für alle $f \in A_{\mathfrak{A}}$.

Mit Hilfe der letzten Rechnungen läßt sich jetzt die Topologie auf $\mathcal{Y}_2(A_{\mathfrak{A}})$ durch Angabe einer Basis folgendermaßen definieren: Für h, U, r wie oben sei $N(h, U, r) = \{h_a \mid \|a\| < r\}$, dann ist $\mathcal{B} = (N(h, U, r) \mid h \in \mathcal{Y}_2(A_{\mathfrak{A}}), U \in \mathfrak{B} \text{ und } r > 0 \text{ mit } r < dU, U_r \subset V \in \mathfrak{B} \text{ und } |h(f)| \leq \|f\|_U \text{ für alle } f \in A_{\mathfrak{A}})$ Basis einer Hausdorffschen Topologie auf $\mathcal{Y}_2(A_{\mathfrak{A}})$. Sind nämlich $N(h', U', r')$ und $N(h^*, U^*, r^*)$ aus $\mathcal{B}$, so gilt für $h \in N(h', U', r') \cap N(h^*, U^*, r^*)$: $h = (h')_a = (h^*)_b$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{E}$, $\|a\| < r'$, $\|b\| < r^*$. Seien $U_r' \subset V' \in \mathfrak{B}$ und $U_r^{*} \subset V^* \in \mathfrak{B}$, dann gibt es $r > 0$ und $V \in \mathfrak{B}$ mit $r < r' - \|a\|$, $r < r^* - \|b\|$ und $(V' \cup V^*)_r \subset V$. Mit $U = V' \cup V^*$ gilt wegen ii) $N(h, U, r) \subset N(h', U', r') \cap N(h^*, U^*, r^*)$. Die so definierte Topologie ist offenbar Hausdorffsch. Ferner ist die Projektion q lokaltopologisch.

4^o Definition von $\mathcal{E}_{\mathfrak{A}}(X)$: Die in 2^o eingeführte Abbildung $j: X \rightarrow \mathcal{Y}_2(A_{\mathfrak{A}})$ ist stetig, daher ist $j(X)$ zusammen-

hängend. Sei nun $\mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X)$ die Zusammenhangskomponente von $\mathcal{J}_2(A_{\mathfrak{M}})$, die $j(X)$ enthält. Dann ist $(\mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X), q_{\mathfrak{M}})$, $q_{\mathfrak{M}} = q|_{\mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X)}$, ein Gebiet über $\mathbb{E}$ und die Restriktion $j_{\mathfrak{M}}: X \rightarrow \mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X)$ von j erfüllt $p = q_{\mathfrak{M}} \circ j_{\mathfrak{M}}$ (2°), ist also Morphismus von Gebieten. Man erkennt weiter: Jedes Basiselement $N(h, U, r) \in \mathcal{B}|_{\mathcal{E}}$ ist eine Kugel $B(h, r) \subset \mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X)$. Es gilt daher für die Randdistanz $d_{\mathfrak{M}}$ von $(\mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X), q_{\mathfrak{M}})$: $d_{\mathfrak{M}}(h) \geq \sup\{r \mid r \in \mathbb{R}_+, \text{ es gibt } U, V \in \mathcal{B} \text{ mit } r < dU, U_r \subset V \text{ und } |h(f)| \leq \|f\|_U \text{ für alle } f \in A_{\mathfrak{M}}\}$.

5° Fortsetzung von $A_{\mathfrak{M}}$ nach $\mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X)$: Für jede analytische Funktion $f \in A$ definiert $\underline{f}: \mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X) \ni h \mapsto h(f) \in \mathbb{C}$ eine analytische Funktion $\underline{f}: \mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = \underline{f} \circ j_{\mathfrak{M}}$: Sei $h \in \mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X)$ mit $h \in N(h, U, r) \subset \mathcal{E}_{\mathfrak{M}}(X)$, $U_r \subset V \in \mathcal{B}$. Es muß gezeigt werden, daß die Zuordnung $\underline{f} \circ q_{\mathfrak{M}}^{-1}: B(q(h), r) \ni q(h) + a \mapsto h_a(f) \in \mathbb{C}$ analytisch ist. Für $a \in B(0, r) \subset \mathbb{E}$ gilt $|h_a(f)| \leq \|f\|_V \frac{r}{r - \|a\|}$, wie in 3° gezeigt, und diese Ungleichung gilt auch für alle Potenzen von f . Folglich gilt sogar $|h_a(f)| \leq \|f\|_V$ für alle $a \in B(0, r)$, das bedeutet, daß $\underline{f}$ lokalbeschränkt ist. Bleibt zu zeigen, daß $\underline{f}$ auch G-differenzierbar ist (1.4). Sei $b \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Für $\lambda \in \{\xi \mid \xi \in \mathbb{C}, \|a + \xi b\| < r\}$ setzen wir $g(\lambda) = h_{a+\lambda b}(f)$. Mit $s = \frac{r - \|a\|}{2\|b\|} > 0$ gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < s$: $\|a + \lambda b\| < r$, $|h_a(P_{sb}^n f)| \leq \|f\|_V$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g(\lambda) = h_{a+\lambda b}(f) = \sum_{0 \leq n} h_a(P_{\lambda b}^n f) = \sum_{0 \leq n} h_a(P_{sb}^n f) \left(\frac{\lambda}{s}\right)^n$. Also ist g im Nullpunkt analytisch und damit $\underline{f} \circ q_{\mathfrak{M}}^{-1}$ G-differenzierbar.

Sei jetzt $\underline{A}_{\mathfrak{B}} = \{ \underline{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}} \}$, dann ist $(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), j_{\mathfrak{B}}, \underline{A}_{\mathfrak{B}})$ nach den Ausführungen 1° - 5° eine simultane analytische Fortsetzung von $A_{\mathfrak{B}}$.

8.2 Lemma: Sei $\mathfrak{B}$ abzählbare und zulässige Überdeckung von X , die wie in 8.1 nur aus beschränkten Mengen besteht. Dann ist $(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), j_{\mathfrak{B}}, \underline{A}_{\mathfrak{B}})$ maximale Fortsetzung von $A_{\mathfrak{B}}$.

Beweis: $\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$ ist $\underline{A}$ -separabel ($\underline{A} = \underline{A}_{\mathfrak{B}}$): Zu Punkten $h, h' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$, $h \neq h'$, gibt es $f \in A_{\mathfrak{B}}$ mit $h(f) \neq h'(f)$, also $\underline{f}(h) \neq \underline{f}(h')$. Sei $\mathfrak{B}$ abzählbare und zulässige Überdeckung von $\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$ mit $\underline{A} = \underline{A}_{\mathfrak{B}}$ (Satz 6.5). Nach Satz 7.9 in Verbindung mit 7.4 bleibt nur noch zu zeigen, daß für alle $\underline{U} \in \mathfrak{B}$ gilt: $d_{\mathfrak{B}}(\hat{\underline{A}}(\underline{U})) > 0$. Es gibt $U, V \in \mathfrak{B}$ und $r > 0$ mit $r < d_U$, $U_r \subset V$, und $\|\underline{f}\|_{\underline{U}} \leq \|f\|_U$ für alle $f \in A$. Für $h \in \hat{\underline{A}}(\underline{U})$ ist dann $|h(f)| = |\underline{f}(h)| \leq \|\underline{f}\|_{\underline{U}} \leq \|f\|_U$, also nach 8.1.4° $d_{\mathfrak{B}}(h) \geq r$. Folglich gilt $d_{\mathfrak{B}}(\hat{\underline{A}}(\underline{U})) \geq r > 0$.

$\omega = \omega(X)$ sei das System der abzählbaren zulässigen Überdeckungen von X . Für $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \omega$, $\mathfrak{B}' < \mathfrak{B}$ (i.e. $\mathfrak{B}'$ ist Verfeinerung von $\mathfrak{B}$), sei $i_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}: \mathcal{E}_{\mathfrak{B}'}(X) \rightarrow \mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$ die Restriktionsabbildung. $i_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ ist dann stetig und erfüllt $q_{\mathfrak{B}} = q_{\mathfrak{B}'} \circ i_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$.

8.3 Satz: Sei $(\mathcal{E}(X), q)$ der Durchschnitt der Gebiete $(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), q_{\mathfrak{B}})$, $\mathfrak{B} \in \omega$, bezüglich der Morphismen $j_{\mathfrak{B}}: X \rightarrow \mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$ mit den zugehörigen Morphismen $j: (X, p) \rightarrow (\mathcal{E}(X), q)$ und $i_{\mathfrak{B}}: (\mathcal{E}(X), q) \rightarrow (\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), q_{\mathfrak{B}})$ (vgl. Satz 2.4). Dann gilt: 1° $(\mathcal{E}(X), q)$ ist die Holomorphiehülle von X .

2° $(\mathcal{E}(X), q)$ ist projektiver Limes des projektiven Systems $(((\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), q_{\mathfrak{B}}) \mid \mathfrak{B} \in \omega), (i_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \mid \mathfrak{B} < \mathfrak{C}))$ in der Kategorie $X/\underline{G}(\underline{E})$ der Gebiete unter (X, p) .

3° Jeder Punkt $h = (h_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega) \in \mathcal{E}(X)$ ist ein b-stetiger Algebramorphismus $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathbb{C}$ vermöge

$h: \mathcal{O}_X \ni f \longmapsto h_{\mathfrak{B}}(f) \in \mathbb{C}$, falls $f \in A_{\mathfrak{B}}$; mit der folgenden

Eigenschaft: Es gibt ein $R > 0$ und in jeder Überdeckung

$\mathfrak{B} \in \omega$ Mengen $U, V \in \mathfrak{B}$ mit $R < dU$, $U_R \subset V$ und

$|h(f)| \leq \|f\|_U$ für alle $f \in A_{\mathfrak{B}}$.

Beweis: 1° ergibt sich aus 2.7 und Lemma 8.2 mit der folgenden Feststellung: Zu jeder Überdeckung $\mathfrak{B} \in \omega$, $\mathfrak{B} = (V_n \mid n \in \mathbb{N})$, $V_n \subset V_{n+1}$, gibt es eine Überdeckung $\mathfrak{B} \in \omega$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{B}$, die nur aus beschränkten Mengen besteht. Zu einem beliebigen Punkt $x_0 \in X$ setze $W_n = \{x \mid x \in V_n \text{ und } m(x_0, x) < n\}$ und $\mathfrak{B} = (W_n \mid n \in \mathbb{N})$.

Wegen der Bedeutung des Satzes 8.3 wollen wir die Überlegungen, die zum Nachweis von 1° führen, noch einmal ausführlich darstellen: Sei $(X', j', \mathcal{O}_{X'})$ eine simultane analytische

Fortsetzung von $\mathcal{O}_X$. Zu $\mathfrak{B} \in \omega$ findet man wie oben $\mathfrak{B} \in \omega$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{B}$. Da $(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), j_{\mathfrak{B}}, A_{\mathfrak{B}})$ nach Lemma 8.2 maximale simultane

Fortsetzung von $A_{\mathfrak{B}}$ ist, gibt es einen Morphismus

$j'_{\mathfrak{B}}: (X', p') \longrightarrow (\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), q_{\mathfrak{B}})$ mit $j_{\mathfrak{B}} = j'_{\mathfrak{B}} \circ j'$ und $f' = \underline{f} \circ j'_{\mathfrak{B}}$. (f' sei Fortsetzung von f nach X' , $\underline{f}$ sei wie in 8.1.5°)

Wegen $j_{\mathfrak{B}} = i_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \circ j_{\mathfrak{B}}$ ist mit $j'_{\mathfrak{B}} = i_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \circ j'_{\mathfrak{B}}$ ein Morphismus

$j'_{\mathfrak{B}}: (X', p') \longrightarrow (\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), q_{\mathfrak{B}})$ definiert, derart daß $(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), j'_{\mathfrak{B}}, A_{\mathfrak{B}})$

Fortsetzung von $A'_{\mathfrak{B}} = \{f' \mid f \in A\} \subset \mathcal{O}_{X'}$ mit $j_{\mathfrak{B}} = j'_{\mathfrak{B}} \circ j'$ ist.

Da $(\mathcal{E}(X), q)$ nach Voraussetzung Durchschnitt der Gebiete $(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), q_{\mathfrak{B}})$, $\mathfrak{B} \in \omega$, ist, gibt es einen Morphismus $k: (X', p') \rightarrow (\mathcal{E}(X), q)$ mit $j = k \circ j'$ und $j'_{\mathfrak{B}} = i_{\mathfrak{B}} \circ k$ für alle $\mathfrak{B} \in \omega$. Es folgt für $f \in \mathcal{O}_X$, $f \in A_{\mathfrak{B}}$:

$f' = f \circ j'_{\mathfrak{B}} = f \circ i_{\mathfrak{B}} \circ k$, wobei $f \circ i_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}(X)}$. Also ist $(\mathcal{E}(X), k, \mathcal{O}_{\mathcal{E}(X)})$ Fortsetzung von $\mathcal{O}_X$, mit $j = k \circ j'$, das heißt, $(\mathcal{E}(X), j, \mathcal{O}_{\mathcal{E}(X)})$ ist maximale Fortsetzung von $\mathcal{O}_X$.

2° Für $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \omega$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{B}'$, gilt offenbar $j_{\mathfrak{B}} = i_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} \circ j_{\mathfrak{B}'}$. Nach Konstruktion in 2.4 ist $i_{\mathfrak{B}}$ definiert durch $i_{\mathfrak{B}}: \mathcal{E}(X) \ni (h_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega) \mapsto h_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$, also gilt auch $i_{\mathfrak{B}} = i_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} \circ i_{\mathfrak{B}'}$. Bleibt die Maximalität zu zeigen. Ist $j': (X, p) \rightarrow (X', p')$ ein weiteres Gebiet unter (X, p) mit Morphismen $i'_{\mathfrak{B}}: (X', p') \rightarrow (\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), q_{\mathfrak{B}})$, die $j_{\mathfrak{B}} = i'_{\mathfrak{B}} \circ j'$ und $i'_{\mathfrak{B}} = i_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} \circ i'_{\mathfrak{B}'}$ für alle $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \omega$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{B}'$, erfüllen, so folgt schon aus der Durchschnittseigenschaft, daß es einen eindeutig bestimmten Morphismus $k: (X', p') \rightarrow (\mathcal{E}(X), q)$ unter (X, p) mit $i'_{\mathfrak{B}} = i_{\mathfrak{B}} \circ k$ für alle $\mathfrak{B} \in \omega$ gibt.

3° Zu $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \omega$ findet man $\mathfrak{B}'' \in \omega$ mit $\mathfrak{B} < \mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{B}' < \mathfrak{B}''$. Nach 2° gilt dann für $h = (h_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega) \in \mathcal{E}(X)$ und $f \in A_{\mathfrak{B}} \cap A_{\mathfrak{B}'}$: $h_{\mathfrak{B}}(f) = h_{\mathfrak{B}}(f)$ und $h_{\mathfrak{B}''}(f) = h_{\mathfrak{B}'}(f)$; also ist $h: \mathcal{O}_X \ni f \mapsto h_{\mathfrak{B}}(f) \in \mathbb{C}$, falls $f \in A_{\mathfrak{B}}$, wohldefiniert. Die Stetigkeit folgt aus $h|_{A_{\mathfrak{B}}} = h_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$ für alle $\mathfrak{B} \in \omega$, und die zum Schluß angegebene Eigenschaft gilt nach Konstruktion des Durchschnitts.

Bemerkung: Mit $\mathcal{E}(X) = \lim_{\mathfrak{B} \in \omega} \text{proj } \mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X) = \varprojlim_{\mathfrak{B} \in \omega} \mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$ hat man eine Formel, die in enger Beziehung zu $(\mathcal{O}_X, b) = \varinjlim_{\mathfrak{B} \in \omega} A_{\mathfrak{B}} = \varinjlim_{\mathfrak{B} \in \omega} A_{\mathfrak{B}}$ steht.

Vergleiche mit den von ALEXANDER [1] und COEURÉ [11] durchgeführten Konstruktionen ergeben:

8.4 Corollar: 1° $\mathcal{E}_A(X)$ ist offene Teilmenge von $\mathcal{E}(X)$, wobei offen bleibt, ob $\mathcal{E}_A(X) = \mathcal{E}(X)$ gilt.

2° Dasselbe gilt für $\mathcal{E}_C(X)$ im separablen Fall.

8.5 Corollar: Die Holomorphiehülle eines Gebietes (X, p) über dem Banachraum $\mathbb{E}$ ist pseudokonvex.

Beweis: Sei $\omega' = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \in \omega, \mathfrak{B} \text{ besteht aus beschränkten Mengen}\}$. Es gilt dann $d_{\mathcal{E}(X)} = \inf\{d_{\mathfrak{B}} \circ i_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega\}$ und nach den Ausführungen zu 8.3.1 $^{\circ}$ auch $d_{\mathcal{E}(X)} = \inf\{d_{\mathfrak{B}} \circ i_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega'\}$. Da nach Lemma 8.2 jedes Gebiet $(\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X), q_{\mathfrak{B}})$, $\mathfrak{B} \in \omega'$, $\underline{A}_{\mathfrak{B}}$ -konvex ist, ist $\mathcal{E}_{\mathfrak{B}}(X)$ auch pseudokonvex und damit $-\log d_{\mathfrak{B}}$ pseudokonvex. Es folgt: $-\log d_{\mathcal{E}(X)} = \sup\{-\log(d_{\mathfrak{B}} \circ i_{\mathfrak{B}}) \mid \mathfrak{B} \in \omega'\}$ ist pseudokonvex, da $d_{\mathcal{E}(X)}$ stetig ist [11, th. 3.1].

Literatur:

- [1] ALEXANDER, H. : Analytic Functions on Banach Spaces.
Thesis, University of California (1968).
- [2] AMIR, D. - LINDENSTRAUSS, J. : The structure of weakly
compact sets in Banach spaces. Ann. of Math. 88,
35 - 46 (1968).
- [3] BEHNKE, H. - THULLEN, P. : Theorie der Funktionen mehrerer
komplexer Veränderlichen. Erg. der Math. 51 (1970).
Erste Auflage 1932.
- [4] BOURBAKI, N. : Topologie Générale, Chap. I ; 4^e édition.
Paris: Hermann (1965).
- [5] BOURBAKI, N. : Topologie Générale, Chap. X ; 2^e édition.
Paris: Hermann (1961).
- [6] BOURBAKI, N. : Espaces Vectoriels Topologiques, Chap. I ;
2^e édition. Paris: Hermann (1966).
- [7] BREMERMAN, H. : Holomorphic functionals and complex con-
vexity in Banach spaces. Pac. J. of Math. 7 , 811 -
831 (1957).
- [8] BUNGART, L. : Holomorphic functions with values in locally
convex spaces and applications to integral formulas.
Trans. Amer. Math. Soc. 111 , 317 - 344 (1964).
- [9] CARTAN, H. : Sémin. E. N. S. 51/52. New York: Benjamin (re-
print 1967).
- [10] CARTAN, H. - THULLEN, P. : Zur Theorie der Singularitäten
der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.
Math. Ann. 106 , 617 - 647 (1932).
- [11] COEURÉ, G. : Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces
vectoriels topologiques et applications à l'étude des
fonctions analytiques. Ann. Inst. Fourier 20 , 361 -
432 (1970).
- [12] DINEEN, S.: The CARTAN-THULLEN theorem for Banach spaces.
Erscheint in Ann. de Mat. Pisa.
- [13] DINEEN, S. : Bounding subsets of a Banach space. Erscheint
in Math. Ann.
- [14] DINEEN, S. : Unbounded holomorphic functions on a Banach
space. Erscheint in London J. of Math.

- [15] DINEEN, S. : Topologie de NACHBIN et prolongement analytique en dimension infinie. C.R. Acad. Sci. 271 , 643 - 644 (1970).
- [16] DOUADY, A. : Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann.Inst. Fourier 16 , 1 - 95 (1966).
- [17] GROTHENDIECK, A. : Sur certains espaces de fonctions holomorphes II. J. r. u. a. Math. 192 , 77 - 94 (1953).
- [18] GUNNING, R.C. - ROSSI, H. : Analytic Functions of Several Complex Variables. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall (1965).
- [19] HILLE, E. - PHILLIPS, R. : Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math.Soc. Publ. 31 (1957).
- [20] HIRSCHOWITZ, A. : Bornologie des espaces de fonctions analytiques en dimension infinie. Erscheint in Sémin. LELONG.
- [21] HIRSCHOWITZ, A. : Divers notions d'ouverts d'analyticité en dimension infinie. Erscheint in Sémin. LELONG.
- [22] HIRSCHOWITZ, A. : Prolongement analytique en dimension infinie. C.R. Acad. Sci. 270, 1736 - 1737 (1970).
- [23] LELONG, P. : Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques. Sémin. LELONG 67/68, Springer Lecture Notes 71 .
- [24] LINDENSTRAUSS, J. : On Complemented Subspaces of m . Isr. J. of Math. 5 , 153 - 156 (1967).
- [25] MIGNOT, F. : Espaces analytiques banachiques. Sémin. CHOQUET 66/67.
- [26] NACHBIN, L. : Topology on spaces of holomorphic mappings. Erg. d. Math. 47 (1969).
- [27] OKA, K. : Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Tokio: Iwanami Shoten (reprint 1961).
- [28] SCHAEFER, H.H. : Topological Vector Spaces. New York: Macmillan (1966).
- [29] SCHWARTZ, L. : Théorie des distributions à valeurs vectorielles I. Ann. Inst. Fourier 7 ; 1 - 141 (1957).

- [30] STEIN, K. : Einführung in die Funktionentheorie
mehrerer Veränderlichen. Vorlesungsausarbeitung
München (1962) .
- [31] TAYLOR, A.E. : Historical Notes on Analyticity as a Concept in Functional Analysis. Princeton Mathematical Series 31 : Problems in Analysis (1970).
- [32] ZORN, M.A. : Characterisation of Analytic Functions in Banach Spaces. Ann. Math. 46 , 585 - 593 (1945).
- [33] ZORN, M.A. : GÂTEAUX-differentiability and essential boundedness. Duke J. Math. 12 , 579 - 583 (1945).
- [34] HERVÉ, M. : Analytic and Plurisubharmonic Functions. Springer Lecture Notes 198 (1971).

Lebenslauf

Geburtsdatum: 25.7.1944 .

Geburtsort: Lindau am Bodensee (Bayern) .

Schulbildung: 1951 - 1955 Volksschule in Hamburg ;
1955 - 1964 Internatsgymnasium Schloß Plön in
Holstein.

Studium: 1964 - 1969 Universität München: Diplomvorprüfung
im November 1966 , Diplomhauptprüfung im Februar
1969 .

Ich hörte Vorlesungen bei K.Stein, G.J.Rieger,
G.Hämmerlin, F.Bopp, K.Schütte, W.Stegmüller,
H.Kerner, H.Richter, M.Koecher, E.Wienholtz,
K.J.Ramspott, O.Forster, K.Jörgens.

Seit Herbst 1969 bin ich Verwalter einer wissen-
schaftlichen Assistentenstelle an der jetzigen Fakul-
tät für Mathematik der Universität München.

München, im August 1971

Accord Blitz
München 2 Telefon 775218
Lindwurmstraße 60/0 Ghs.

